UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

IMERSÕES DE VARIEDADES EM ESPAÇOS EUCLIDIANOS

MARIA JOSÉ D'ALASCIO

ABRIL - 1982

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

especialidade em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Dr. Inder Jeet Taneja
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Willian Glenn Whitley
Orientador

Prof. João B. Pitombeira de Carvalho

Prof. Ítalo José Dejter

RESUMO

Apresentamos neste trabalho, um estudo de imersões de Variedades em Espaços Euclidianos, por intermédio das classes características de Stiefel - Whitney e da construção de algumas funções bilineares não-singulares.

ABSTRACT

In this work, we present, a study of immersions of manifolds into Euclidean Spaces, based on the Stiefel-Whitney characteristic classes and the construction of some nonsingular bilinear maps.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO

Estudamos neste trabalho, imersões de espaços projetivos em Espaços Euclidianos através de classes características, ou de funções bilineares entre espaços Euclidianos.

Apresentamos este estudo por J. Milnor e pelo artigo de K.Y. Lam.

No Capítulo I vimos uma breve introdução da teoria de variedade diferenciável e seus espaços tangentes.

No Capítulo II, fizemos um estudo sobre fibrados.

No Capítulo III, descrevemos um número de construções básicas envolvendo fibrados.

No Capítulo IV, estudamos as classes características de Stiefel-Whitney, onde vimos a imersão de espaços projetivos em Espaços Euclidianos.

No Capítulo V, estudamos a construção de algumas funções bilineares não-singulares, proporcionando o cálculo da imersão, na dimensão geométrica do fibrado, sobre o espaço projetivo P^n.

CAPÍTULO I

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Neste capítulo, iremos dar uma breve introdução da teoria de variedade diferenciável e seus espaços tangentes.

Definição 1.1

Um espaço T_2 (Hausdorff) M chama-se uma variedade topológica de dimensão n ($n \geq 0$), quando, para qualquer x e M, existir um aberto U que contém x, homeomorfo ã um subconjunto aberto de R^n.

Exemplos:

1) R^n é variedade

Basta considerar $U = R^n$ e $f(x) = x$ a função identidade.

2) O gráfico de uma aplicação contínua em um aberto $U \subseteq R^n$ é uma n - variedade.

Seja $f: U \to R$, contínua e U um subconjunto aberto de R^n. O gráfico de f é o subconjunto do produto cartesiano $U \times R$ definido por:

$$G(f) = \{(x, f(x)) \,/\, x \in U\}$$

Seja: $\psi : U \to G(f)$

$x \to (x, f(x))$

ψ é contínua, pois possui coordenadas contínuas.

Seja: $\Psi : G(f) \to U$

$(x, f(x)) \to x$

Ψ também é contínua, pois é a restrição para G(f) da projeção $p: U \times R \to U$.

Assim:

$$\psi \circ \Psi = \psi(\Psi(x, f(x))) = \psi(x) = (x, f(x)) = id_{G(f)}$$

e

$$\Psi \circ \psi = \Psi(\psi(x)) = \Psi(x, f(x)) = x = id_U$$

Logo ψ é homeomorfismo.

Portanto, o gráfico de uma aplicação contínua é uma variedade.

Definição 1.2:

Para $U \subset R^n$, a função $f: U \to M \subset R^m$ é dita diferenciável de classe C^∞, se cada função coordenada $f_a: U \to R$, $a = 1,2,\ldots,m$ é diferenciável de classe C^∞.

Se f é diferenciável de classe C^∞, então a derivada parcial $\partial f/\partial u_i$ é definida como uma função diferenciável de U em R^n, na qual, a a-ésima coordenada é $\partial f_a/\partial u_i$; $i = 1,2,\ldots,n$.

Isto é:

$$f: U \to R^n$$
$$x \to (f_1(x), f_2(x),\ldots,f_m(x))$$

$$\partial f/\partial u_i: U \to R^n$$

$$\partial f/\partial u_i(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_i}(x),\ldots, \frac{\partial f_m(x)}{\partial u_i} \right)$$

Definição 1.3:

Um subconjunto $M \subset R^m$ é uma variedade diferenciável de dimensão $n \geq 0$ se, para cada x em M, existe uma função dife -

renciável

$$h: U \to R^n$$

definida em um conjunto aberto $U \subset R^n$ tal que:

1) h é um homemorfismo de U em uma vizinhança aberta V de x em M, e
2) para cada x em U, a matriz $[\ \partial h_\alpha(u)/\partial u_j\ ]$ tem posto n; isto é, os n-vetores $\partial h/\partial u_1, \ldots, \partial h/\partial u_n$ em u são linearmente independentes.

Para cada uma das funções h, a imagem $h(U) = V$ é chamada uma vizinhança coordenada em M e a tripla (U, V, h) é chamada uma parametrização local de M.

<u>Lema 1.1</u>:

Sejam (U, V, h) e (U', V', h') duas parametrizações locais de M, tal que $V \cap V'$ é não-vazio. Então a correspondência

$$u' \to h^{-1}(h'(u'))$$

define uma função diferenciável de um conjunto aberto $(h')^{-1}(V \cap V') \subset R^n$ em um conjunto aberto $h^{-1}(V \cap V') \subset R^n$.

<u>Obs</u>:

A inversa $h^{-1}: V \to U \subset R^n$ é chamada um "sistema de coordenadas locais" ou "carta" de M.

<u>Prova</u>:

Temos:

$$h^{-1} \circ h': h'^{-1}(V \cap V') \to h^{-1}(V \cap V')$$
$$u' \to h^{-1}(h'(u'))$$

onde:

$$h'^{-1}(V \cap V') \subset U' \quad \text{e}$$

$$h^{-1}(V \cap V') \subset U.$$

Seja $\bar{x} \in V \cap V'$; $\bar{x} = h(\bar{u}) = h'(\bar{u}')$ para algum $\bar{x}$ em U e $\bar{u}'$ em U'.

Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ índices tais que: $[\ \partial h_{a_i}/\partial u_j\ ]$ seja não-singular.

Então, segue do teorema da função inversa que a mesma pode ser resolvida para $u_1, u_2, \ldots, u_n$, como funções diferenciáveis, onde

$$u_j = f_j(h_{a_1}(u), \ldots, h_{a_n}(u))$$

Escrevendo esta equação na forma vetorial como:

$$u = f(h_{a_1}(u), \ldots, h_{a_n}(u)) \quad \text{e}$$

considerando $h(u) = h'(u')$, temos:

$$\begin{aligned}
&h^{-1}(h'(u')) = \\
&= h^{-1}(h'(f(h'_{a_1}(u'), \ldots, h'_{a_n}(u')) = \\
&= h^{-1}(h(f(h_{a_1}(u), \ldots, h_{a_n}(u)) = \\
&= f(h_{a_1}(u), \ldots, h_{a_n}(u)) = \\
&= f(h'_{a_1}(u'), \ldots, h'_{a_n}(u'))
\end{aligned}$$

que é diferenciável para alguma vizinhança V'_u, de u'.

Logo: $u' \mapsto h^{-1}(h'(u'))$ é diferenciável.

Definição 1.4:

Seja $\bar{x}$ um ponto fixo de M e seja $(-\varepsilon, \varepsilon)$ o conjunto dos números reais t, com $-\varepsilon < t < \varepsilon$. Um caminho diferenciável que passa por $\bar{x}$ em M é uma função diferenciável

$$p: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset R^n$$

com a condição que $p(o) = \bar{x}$.

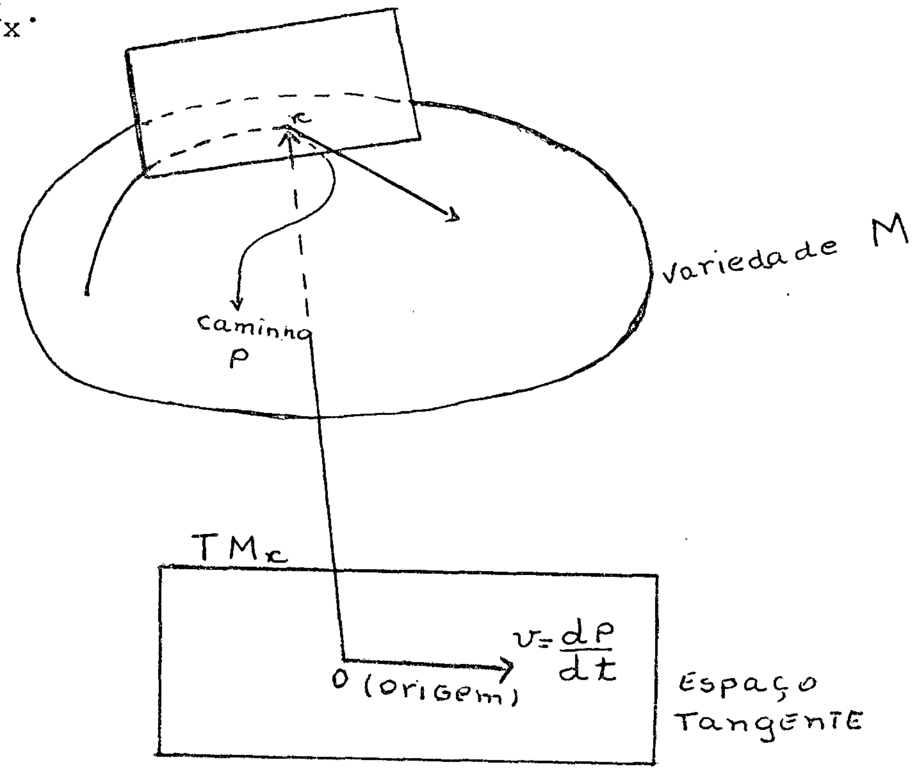
Definição 1.5:

O vetor velocidade de um caminho é definido pelo vetor $v = (dp/dt)/t = 0 \in R^n$ o qual, a i-ésima componente é $dp_i(o)/dt$.

Definição 1.6:

Um vetor $v \in R^n$ é tangente à M no ponto x, se v pode ser expresso como vetor velocidade de algum caminho diferenciável em M que passa por x.

O conjunto de todos os vetores tangentes à M em x é denotado por TM_x.



Em termos de uma parametrização local (U, V, h) com $h(\bar{u}) = \bar{x}$, o espaço tangente pode ser descrito como segue.

Lema 1.2:

Um vetor $v \in R^n$ é tangente em $\bar{x} \in M$ se e somente se, v pode ser expresso por uma combinação linear de vetores:

$$\frac{\partial h}{\partial u_1}(\bar{u}), \dots, \frac{\partial h}{\partial u_n}(\bar{u})$$

Assim, TM_x é um espaço vetorial n-dimensional sobre os números reais.

Prova:

Seja $p: (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ tal que $p(o) = \bar{x}$.

Seja $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ definida por: $\sigma(t) = h^{-1}p(t)$.

Queremos mostrar que $v = \Sigma\, ai\ \partial h/\partial u_i$, onde v é o vetor velocidade $v = \frac{dp}{dt}\Big|_{t=0}$.

Então:

$$v = \frac{d\ h\ \sigma(t)}{dt}\Big|_{t=0} =$$

$$= \Sigma\ \partial h/\partial u_i\Big|_{\bar{u}} \cdot \frac{d\ \sigma_i}{dt}\Big|_{t=0}$$

Seja $a_i = \frac{d\ \sigma_i}{dt}\Big|_{t=0}$.

Assim

$$v = \Sigma\ a_i\ \partial h/\partial u_i\Big|_{\bar{u}}$$

Reciprocamente, se $v = \Sigma\ a_i \frac{\partial h}{\partial u_i}(\bar{u})$

então v é tangente à M em $\bar{x}$.

Sejam:

$$\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$$

$$\sigma(t) = t(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

tal que $\sigma(0) = 0$ e $\sigma'(0) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e

$$p: (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$$

$$p(t) = h\ \sigma(t)$$

Então:

$$v = \frac{dp}{dt}\Big|_{t=0} = \Sigma \frac{\partial h}{\partial u_i} \cdot \frac{d\ \sigma_i}{dt} = \Sigma\ a_i\ \partial h/\partial u_i$$

Logo v é tangente à M em $\bar{x}$.

Definição 1.7:

Definimos variedade tangente TM, como um subespaço de $M \times R^n$, formado de todos os pares (x, v) com $x \in M$ e $v \in TM_x$.

Isto é:

$$TM = \{(x, v)/x \in M \ \text{ e } \ v \in TM_x\}$$

Definição 1.8:

Sejam $M \subset R^n$ e $N \subset R^m$ duas variedades diferenciáveis e $f: M \to N$ uma função. Seja $\bar{x} \in M$ e (U, V, h) uma parametrização local de M, com $\bar{x} = h(\bar{u})$.

A função f é dita diferenciável em $\bar{x}$ se a composição

$$f \circ h : U \to N \subset R^m \quad \text{é}$$

diferencial em alguma vizinhança de $\bar{u}$.

Definição 1.9:

A função $f: M \to N$ é diferenciável se, para cada x em M, é diferenciável em x.

Definição 1.10:

Uma função $f: M \to N$ é chamada um difeomorfismo se:

1) f é bijetora

2) f e f^{-1} são diferenciáveis.

Lema 1.3:

A função identidade de M é sempre diferenciável. A composta de duas funções diferenciáveis $M \xrightarrow{g} M' \xrightarrow{f} M''$ é diferenciável.

Prova:

a) $id: M \to M$

Devemos mostrar que: $id \circ h: U \to M$ é diferenciável, onde (U, V, h) é uma parametrização local de M. Mas $id \circ h = h$ que é diferenciável.

Logo $id: M \to M$ é diferenciável.

b) Sejam (U, V, h) e (U_1, V_1, k) parametrizações locais de M' e M respectivamente.

Como f é diferenciável, então $f \circ h: U_1 \to M''$ é diferenciável. Como g é diferenciável, então $g \circ k: U \to M'$ é diferenciável.

Devemos mostrar que:

$(f \circ g) \circ k \colon U \to M''$ é diferenciável.

Mas,

$$(f \circ g) \circ k = f \circ h \circ h^{-1} \circ g \circ k$$

Como $f \circ h$, h^{-1} e $g \circ k$ são diferenciáveis, temos que: $f \circ g \circ k$ é diferenciável.

Logo $f \circ g$ é diferenciável.

Qualquer função $f\colon M \to N$ que é diferenciável em x, determina uma função linear Tf_x do espaço tangente TM_x em $TN_{f(x)}$ como segue:

$$Tf_x : TM_x \to TN_{f(x)}$$

$$v \to Tf_x(v)$$

Seja $v \in TM_x$, então v pode ser expresso como o vetor velocidade $v = (dp/dt)/t = 0$ de algum caminho diferenciável que passa por x em M.

Definimos:

$$Tf_x(v) = \frac{d(f \circ p)}{dt}\Big|_{t=0}$$

do caminho imagem

$$f \circ p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

Esta definição não depende de p.

De fato:

Sejam:

$f \circ p_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ e

$f \circ p_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ caminhos imagens, tais que:

$$p_1(0) = p_2(0) = x$$

Vamos mostrar que:

$$\frac{d\,(f \circ p_1)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d\,(f \circ p_2)}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$\frac{d\,(f \circ p_1)}{dt}\Big|_{t=0} = Df_{(x)} \cdot Dp_1(0) =$$

$$= Df_{(x)} \cdot Dp_2(0) = \frac{d\,(f \circ p_2)}{dt}\Big|_{t=0}$$

Tf_x é uma função linear.

De fato:

Seja (U, V, h) uma parametrização local de M, então:

$f \circ h : U \to N$ é diferenciável.

Mas pelo lema 1.2, temos:

$$v = \Sigma \frac{\partial h}{\partial u_i} \cdot \frac{d\,\sigma_i}{dt} \quad , \quad \text{onde}$$

$$\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$$

$$\sigma(t) = t\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Então:

$$Tf_x(v) = Tf_x\left(\Sigma \frac{\partial h}{\partial u_i} \cdot \frac{d\,\sigma_i}{dt}\right) =$$

$$= \Sigma\, a_i \frac{\partial\,(f \circ h)}{\partial u_i}$$ para cada número real $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Tf_x é uma transformação linear, pois:

Sejam:

$$v_1 = \Sigma\, a_i \frac{\partial h}{\partial u_i} \in TM_x$$

$$v_2 = \Sigma\, b_i \frac{\partial h}{\partial u_i} \in TM_x \quad \text{e} \quad a \in K$$

$$Tf_x\ (a \cdot v_1 + v_2) =$$

$$= Tf_x\ (a\, \Sigma\, a_i \frac{\partial h}{\partial u_i} + \Sigma\, b_i \frac{\partial h}{\partial u_i}) =$$

$$= Tf_x\ (\Sigma\, a \cdot a_i \frac{\partial h}{\partial u_i} + \Sigma\, b_i \frac{\partial h}{\partial u_i}) =$$

$$= \Sigma\ (a \cdot a_i \frac{\partial\ (f \circ h)}{\partial u_i} + b_i \frac{\partial\ (f \circ h)}{\partial u_i}) =$$

$$= a \cdot \Sigma\, a_i \frac{\partial\ (f \circ h)}{\partial u_i} + \Sigma\, b_i \frac{\partial\ (f \circ h)}{\partial u_i} =$$

$$= a \cdot Tf_x\ (v_1) + Tf_x\ (v_2)$$

Lema 1.4:

T é um funtor da categoria de variedade diferenciável de classe C^∞ e funções diferenciáveis de classe C^∞ nela mesmo.

Em outras palavras:

(1) Se M é uma variedade diferenciável, então TM é uma variedade diferenciável.

(2) Se f é uma função C^∞ de M em N, então Tf é uma função diferenciável de TM em TN.

(3) Se I é a função identidade de M, então TI é a função identidade de TM e

(4) Se a composição f o g de duas funções diferenciáveis é definida, então:

$$T\ (f \circ g) = (Tf) \circ (Tg)$$

Uma conseqüência imediata é:

(5) Se f é um difeomorfismo de M em N, então Tf é um é difeomorfismo de TM em TN.

Prova:

(1) Se M é uma variedade diferenciável, devemos mostrar que TM é uma variedade diferenciável.

Seja $TM = \{(x, v) / x \in M \text{ e } v \in TM_x\}$

Como M é uma variedade diferenciável e TM_x é o espaço tangente, então TM é uma variedade diferenciável.

(2) Seja (U, V, h) uma parametrização local de M. Como $f: M \to N$ é diferenciável, então:

$f \circ h : U \to N$ é diferenciável.

Seja (TU, TV, Th) uma parametrização local de TM. Devemos mostrar que:

$Tf \circ Th : TU \to TN$ é diferenciável.

Seja $Tf \circ Th : TU \to TN$ definida por:

$(Tf \circ Th)\ (x, v) = Tf\ (Th\ (x, v)) =$

$= Tf\ (h(x), Th_x(v)) =$

$= (f(h(x))\ ,\ Tf_x\ Th_x(v)) =$

$= ((f \circ h)x\ ,\ T(f \circ h)_x\ (v))$

Então:

$$T_{(f \circ h)_x}(v) = \Sigma\, a_i \frac{(f \circ h \circ h)}{\partial u_i}$$

Como $f \circ h$ é diferenciável, temos que $T_{(f \circ h)}$ é diferenciável.

(3) Seja $I: M \to M$ a função identidade de M.

Devemos mostrar que:

$TI: TM \to TM$ é a função identidade de TM.

Seja $TI: TM \to TM$ definida por: $TI\,(x, v) = (I(x), T_{I_x}(v))$

Mas:

$$(I(x),\ T_{I_x}(v)) = (x,\ \Sigma\, a_i \frac{\partial (I \circ h)}{\partial u_i}) =$$

$$= (x,\ \Sigma\, a_i \frac{\partial h}{\partial u_i}) = (x, v)$$

Logo: $TI: TM \to TM$ é a função identidade de TM.

(4) Se $f \circ g$ é definida, então

$$T(f \circ g) = T_f \circ T_g$$

Seja $T(f \circ g): TM \to TN$ definida por:

$$T(f \circ g)(x, v) = ((f \circ g)(x),\ T_{(f \circ g)_x}(v))$$

e

$T_f \circ T_g : TM \to TN$ dada por:

$$(T_f \circ T_g)(x, v) = T_f\ (T_g(x, v)) =$$

$$= T_f(g(x),\ T_{g_x}(v)) =$$

$$= (f(g(x)),\ T_{f_x} T_{g_x}(v)) =$$

$$= ((f \circ g)x,\ T_{(f \circ g)_x}(v))$$

Logo

$$T(f \circ g) = T_f \circ T_g$$

(5) Se f é um difeomorfismo de M em N, vamos mostrar mos que T_f é um difeomorfismo de TM em TN.

Se f é um difeomorfismo, então f tem inversa g.

Assim:

$$(T_f) \circ (T_g) = T_{(f \circ g)} = T_{(id)} = id$$

e

$$(T_g) \circ (T_f) = T_{(g \circ f)} = T_{(id)} = id$$

e deste segue que T_g é a inversa de T_f.

<u>Observação</u>:

De acordo com nossas definições, o espaço tangente $T\,R^n_x$ do espaço vetorial R^n em x é igual ao espaço vetorial R^n.
Em particular, para cada número real u, o espaço tangente $T\,R_u$ é igual à R.

Assim, se $f: M \to R$ é uma função diferenciável real, a derivada

$$T_{f_x}: T_{M_x} \to T\,R_{f(x)} = R$$

pode ser considerada como um elemento do espaço dual,

$$\mathrm{Hom}_R\,(TM_x,\ R).$$

Este elemento T_{f_x} do espaço dual é chamado "diferencial total" de f em x e mais comumente denotado por df(x).
Note que a lei de Leibniz é satisfeita,

$$T(fg)_x = f(x)\ T_{g_x} + g(x)\ T_{f_x}$$

onde fg é definida pela função produto $x \to f(x) \circ g(x)$.
Para cada vetor tangente $v \in TM_x$, o número real $T_{f_x}(v)$ é chamado a derivada direcional da função real f de x na direção v.

Se mantermos (x, v) fixo, mas f variando no espaço vetorial $C^{\infty}(M, R)$, constituído de todas as funções diferenciáveis reais em M, então definimos o operador linear diferenciável

$$X : C^{\infty}(M, R) \to R$$

pela fórmula

$$X(f) = T_{f_x}(v)$$

A lei de Leibniz agora tem a forma:

$$X(fg) = f(x)\ X(g) + X(f)\ g(x)$$

Em alguns casos, o vetor tangente (x, v) é identificado como este operador linear X.

CAPÍTULO II

FIBRADOS

Definição 2.1:

Seja B um espaço topológico fixo, o qual chamaremos espaço base.

Um fibrado real ξ sobre B consiste de:

1) um espaço topológico $E = E(\xi)$ chamado o espaço total,

2) uma função contínua $\pi: E \to B$, chamada função projeção e

3) para cada $b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ tem a estrutura de um espaço vetorial sobre os números reais. Esta deve satisfazer a seguinte restrição:

Condição de trivialidade local

Para cada ponto $\bar{b} \in B$, existe uma vizinhança $U \subset B$ de $\bar{b}$, um inteiro $n \geqslant 0$ e um homemorfismo $h: U \times R^n \to \pi^{-1}(U)$ de modo que, para cada $b \in U$, a correspondência $x \to h(b, x)$ define um isomorfismo entre o espaço vetorial R^n e o espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$.

Ao par (U, h) chamaremos um sistema de coordenadas locais para ξ em b.

Definição 2.2:

Se é possível escolher U da definição 2.1 igual ao espaço base, então ξ é chamado um fibrado trivial.

O espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$ é chamado de fibra sobre b, podendo ser denotado por F_b ou $F_b(\xi)$.

Definição 2.3:

Um fibrado diferenciável consiste do seguinte:

1) o espaço base B e o espaço total E são variedades diferenciáveis,

2) a projeção π: E $\rightarrow$ B é uma função diferenciável e

3) para cada b $\in$ B, existe um sistema de coordenadas locais (U, h) com b $\in$ U, tal que h é um difeomorfismo.

Definição 2.4:

Sejam ξ e η fibrados sobre um mesmo espaço base B. Dizemos que ξ é isomorfo a η, escrevendo-se $\xi \cong \eta$, se existir um homeomorfismo

$$f: E(\xi) \rightarrow E(\eta)$$

tal que, para cada b $\in$ B, f leva $F_b(\xi)$ linearmente isomorfo sobre $F_b(\eta)$.

Exemplo 1:

Um fibrado trivial com espaço total B x R^n, com a função projeção $\pi(b, x) = b$ e com a estrutura de espaço vetorial na fibra definida por:

$$t_1(b, x_1) + t_2(b, x_2) = (b, t_1x_1 + t_2x_2)$$

nós denotaremos por ε_B^n.

A função:

π: B x $R^n \rightarrow$ B definida por $\pi(b, x) = b$ é contínua.

Obviamente, as fibras de ε_B^n são linearmente isomorfas à R^n. Também a identidade de $B \times R^n$ é uma trivialização local. Logo, ε_B^n é um fibrado e será chamado o n - fibrado trivial canônico sobre B.

Exemplo 2:

A fibra tangente τ_M de uma variedade diferenciável. O espaço total de τ_M é a variedade

$$TM = \{(x, v) \,/\, x \in M \quad e \quad v \in TM_x\}$$

A função projeção é:

$$\pi: TM \to M$$
$$(x, v) \to x$$

O espaço base é M e o espaço vetorial em $\pi^{-1}(x)$ é definido por:

$$t_1(x, v_1) + t_2(x, v_2) = (x, t_1v_1 + t_2v_2)$$

Vamos mostrar a condição de trivialidade local.

Seja $\hat{h}: U \times R^n \to \pi^{-1}(U)$ definida por:

$$\hat{h}(x, (a_1,\ldots,a_n)) = (x, \Sigma\, a_i \frac{\partial h}{\partial x_i} (h^{-1}(x))$$

a) $\hat{h}$ é injetora

Sejam $x, y \in U$ e $(a_1, a_2,\ldots,a_n)$, $(b_1, b_2,\ldots,b_n)$ elementos de R^n, com a condição que

$$\hat{h}(x, (a_1,\ldots,a_n)) = \hat{h}(y, (b_1,\ldots,b_n)).$$

Vamos mostrar que $x = y$ e $a_i = b_i$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$

$$\hat{h}(x, (a_1,\ldots,a_n)) = \hat{h}(y, (b_1,\ldots,b_n))$$

$$(x, \Sigma\, a_i \frac{\partial h}{\partial x_i} (h^{-1}(x))) = (y, \Sigma\, b_i \frac{\partial h}{\partial x_i} h^{-1}(x))$$

temos que:

$$x = y \quad e$$

$$\Sigma\, a_i \frac{\partial h}{\partial x_i} (h^{-1}(x)) = \Sigma\, b_i \frac{\partial h}{\partial x_i} (h^{-1}(x))$$

Como $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ são linearmente independentes em TM_x, temos que $a_i = b_i$. Logo $\hat{h}$ é injetora.

b) $\hat{h}$ é sobrejetora

$z \in \pi^{-1}(x) \Longleftrightarrow z \in TM_x$ com $x \in U \Longleftrightarrow z = (x, v)$, onde $x \in U$ e $v \in TM_x$; logo $v = \Sigma\, a_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)$.

Então:

$$z = \hat{h}\ (x, (a_1, \ldots, a_n))$$

Portanto $\hat{h}$ é sobrejetora.

Como $\hat{h}$ é contínua, pois $x \in R^n$ e h é diferenciável, e ainda $\hat{h}/x \times R^n$ é linear em TM_x, concluímos que TM é um fibrado diferenciável.

Se TM é um fibrado trivial, então a variedade M é dita paralelizável.

Exemplo 3:

O espaço projetivo real P^n pode ser definido como o conjunto de todos os pares não ordenados {x, -x}, onde x varia sobre a esfera unitária $S^n \subset R^{n+1}$ e é topologizado como um espaço quociente de S^n.

Seja $E(\gamma_n^1)$ o subconjunto de $P^n \times R^{n+1}$, constituído de todos os pares $(\{\pm x\}, v)$ tal que, o vetor v é um múltiplo de x.

Definimos:

$\pi: E(\gamma_n^1) \to P^n$ por

$\pi(\{\pm x\}, v) = \{\pm x\}$

Então cada fibra $\pi^{-1}(\{\pm x\})$ pode ser identificada com a reta que passa por x e -x em R^{n+1}. Cada reta pode ser tomada como a estrutura do espaço vetorial usual.

Ao fibrado resultante γ_n^1, chamaremos o fibrado canônico da reta sobre P^n.

Provaremos agora que γ_n^1 é localmente trivial.
Seja $U \subset S^n$ um conjunto aberto, o qual é suficientemente pequeno, para que não contenha pares de pontos antípodos e seja U_1 a imagem de U em P^n.

Então o homeomorfismo

$h: U_1 \times R \to \pi^{-1}(U_1)$ será definido por:

$$h(\{\pm x\}, t) = (\{\pm x\}, tx)$$

para cada $(x, t) \in U \times R$.
Logo, (U_1, h) é um sistema de coordenadas locais.
Assim, γ_n^1 é localmente trivial.

<u>Teorema 2.1</u>:

O fibrado γ_n^1 sobre P^n é não-trivial para $n \geqslant 1$.
Provaremos isto, estudando as secções de γ_n^1.

<u>Definição 2.5</u>:

Uma secção de um fibrado ξ com espaço base B é uma função contínua

$$s: B \to E(\xi)$$

a qual leva cada $b \in B$ na fibra correspondente $F_b(\xi)$.

Uma secção não se anula em ponto algum, se $s(b)$ é um vetor não-nulo de $F_b(\xi)$, para cada b.

Vamos mostrar que o fibrado γ_n^1 não possui secções que não se anulam em ponto qualquer.

Seja $s: P^n \to E(\gamma_n^1)$ uma secção qualquer e consideremos a composição

$$S^n \to P^n \overset{s}{\to} E(\gamma_n^1)$$

a qual leva cada $x \in S^n$ para algum par

$$(\{\pm x\},\ t(x)x) \in E(\gamma_n^1).$$

$t(x)$ é uma função contínua com valores reais de x e $t(-x) = -t(x)$.

Desde que S^n é conexo, segue do teorema do valor intermediário que $t(x_o) = 0$, para algum x_o.

Logo, $s(\{\pm x_o\}) = (\{\pm x_o\},\ 0)$

Este obviamente não é o caso para fibrados triviais.

Vamos estudar o espaço $E(\gamma_n^1)$, no caso especial de $n = 1$. Neste caso, cada ponto $e = (\{\pm x\},\ v)$ de $E(\gamma_n^1)$ pode ser escrito como:

$$e = (\{\pm(\cos\Theta,\ \mathrm{sen}\Theta)\},\ t\ (\cos\Theta,\ \mathrm{sen}\Theta))$$

com $0 \leqslant \Theta \leqslant \pi$, $t \in R$.

Esta representação é única, exceto o ponto

$$(\{\pm(\cos 0,\ \mathrm{sen} 0)\},\ t(\cos 0,\ \mathrm{sen} 0))$$

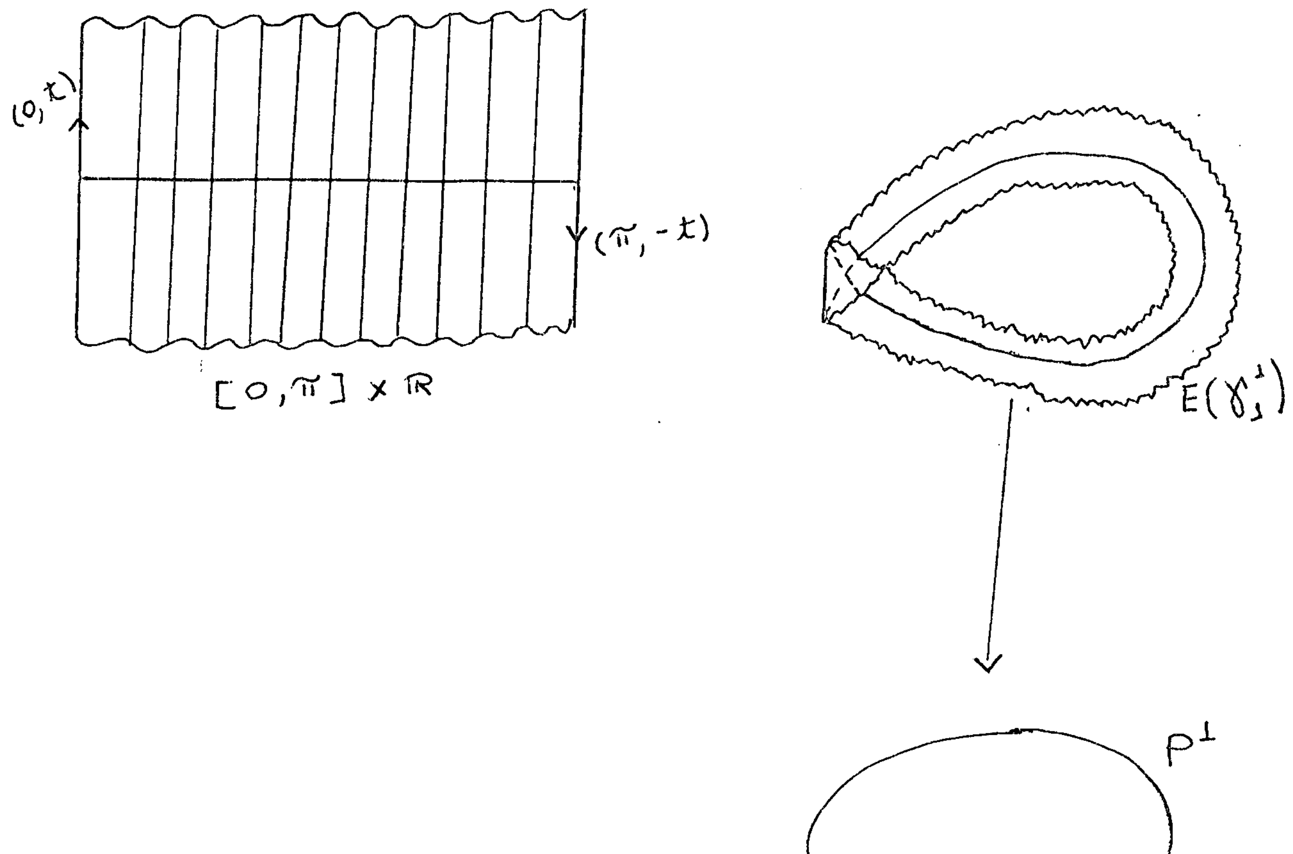
que é igual à

$$(\{\pm(\cos\pi,\ \mathrm{sen}\pi),\ -\ t(\cos\pi,\ \mathrm{sen}\pi))$$

para cada t.

Logo, $E(\gamma_1^1)$ pode ser obtido da faixa $[0,\ \pi] \times R$ no plano, pela identificação da fronteira da esquerda $[0] \times R$ com a fronteira da direita $[\pi] \times R$ sobre a correspondência $(0,\ t) \to (\pi,\ -t)$.

Desta forma, $E(\gamma_1^1)$ é uma faixa de Moebius aberta.



Portanto γ_1^1 é não-trivial.

A faixa de Moebius não é homeomorfo ao cilindro $P^1 \times R = S^1 \times R$.

Definição 2.6:

Seja $\{s_1,\ldots,s_n\}$ uma família de secções de um fibrado ξ. As secções $s_1,\ldots,s_n$ são linearmente independentes se, para cada $b \in B$, os vetores $s_1(b),\ldots,s_n(b)$ são linearmente independentes.

Teorema 2.2:

Um R^n - fibrado ξ é trivial se e somente se ξ admite n secções $s_1,\ldots,s_n$, as quais são independentes.

A prova dependerá de:

Lema 2.3:

Sejam ξ e η fibrados sobre B e f: $E(\xi) \to E(\eta)$ uma função contínua, tal que, para cada $b \in B$, f leva $F_b(\xi)$ linearmente isomorfo sobre $F_b(\eta)$.

Então f é necessariamente um homeomorfismo.

Logo ξ é isomorfo à η.

Prova:

Consideremos um ponto $b_o \in B$ e escolheremos um sistema de coordenadas locais (U, g) para ξ e (V, h) para η, com $b_o \in U \cap V$. Mostraremos que a composição

$$(U \cap V) \times R^n \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} (U \cap V) \times R^n$$

é um homeomorfismo.

Definimos:

$$h^{-1}(f(g(b, x))) = (b, y),$$

onde

$$y \in R^n \ ; \ y = (y_1, \ldots, y_n) \qquad \text{e}$$

$$y_i = \sum_j f_{ij}(b)\ x\, j \ , \qquad \text{sendo}$$

$[f_{ij}(b)]$ a matriz de números reais, não-singular. Além disso, $f_{ij}(b)$ depende continuamente de b.

Seja $[F_{ji}(b)]$ a matriz inversa de $[f_{ij}(b)]$.

Evidentemente,

$$(g^{-1} \circ f^{-1} \circ h)\ (b, y) = (b, x), \qquad \text{onde}$$

$$x_j = \sum_i F_{ji}(b)\ y_i .$$

Como os números $F_{ji}(b)$ depende da matriz $[f_{ij}(b)]$, eles variam continuamente com b.

Então $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h$ é contínua.

Logo f é necessariamente um homeomorfismo.

Prova do teorema 2.2:

Sejam $s_1, \ldots, s_n$ secções de ξ, as quais são linearmente independentes, isto é, $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ são linearmente independentes.

Definimos

$$f: B \times R^n \to E \qquad \text{por}$$

$$f(b, x) = x_1 s_1(b) + \ldots + x_n s_n(b)$$

f é contínua, pois cada $x_i s_i(b)$ é contínua.

Logo $f(b, x)$ é contínua.

f manda cada fibra do fibrado trivial ε_B^n isomorficamente sobre a fibra de ξ.

Portanto f é um isomorfismo do fibrado e ξ é trivial.

Reciprocamente, suponhamos que ξ é trivial com sistema de coordenadas (B, h).

Definimos:

$$s_i(b) = h(b, (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)) \in F_b(\xi)$$

com o elemento 1 no i-ésimo plano.

É evidente que $s_1,\ldots,s_n$ são secções linearmente independentes.

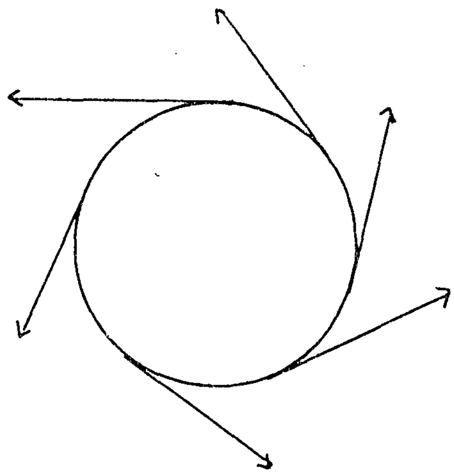
De fato:

$$s_1(b) = h(b, (1,0,\ldots,0))$$
$$s_2(b) = h(b, (0,1,0,\ldots,0))$$
$$\vdots$$
$$s_i(b) = h(b,(0,\ldots,0,1,0,\ldots,o))$$
$$\vdots$$
$$s_n(b) = h(b,(0,\ldots,0,1))$$

Como $\{(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1)\}$ é linearmente independente e h é um homeomorfismo, temos que $s_1(b), s_2(b),\ldots,s_n(b)$ são linearmente independentes, logo $s_1,\ldots,s_n$ são secções independentes.

Como ilustração:

O fibrado tangente do círculo $S^1 \subset R^2$ admite uma secção que não se anula em nenhum ponto, como ilustrado na figura



$s(x) = (x, v) = ((x_1, x_2), (-x_2, x_1))$

Portanto S^1 é paralelizável.

Analogamente, a 3-esfera $S^3 \subset R^4$ admite três campos de vetores independentes que não se anulam em nenhum ponto.

$s_i(x) = (x, \bar{s}_i(x))$ onde

$\bar{s}_1(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$

$\bar{s}_2(x) = (-x_3, x_4, x_1, -x_2)$

$\bar{s}_3(x) = (-x_4, -x_3, x_2, x_1)$

Então S^3 é paralelizável. (Estas fórmulas vieram da multiplicação dos quartenions em R^4).

Fibrados Euclidianos

É importante o estudo dos fibrados em que cada fibra tem a estrutura de um espaço vetorial Euclidiano.

Uma função real μ em um espaço de dimensão finita V é quadrática se, μ pode ser expressa na forma:

$$\mu(v) = \Sigma\, \ell_i(v)\, \ell_i'(v)$$

onde cada ℓ_i e cada ℓ_i' é linear.

Cada função quadrática μ, determina uma forma bilinear simétrica $(v, w) \to v . w$ de $V \times V$ em R, onde

$$v . w = \frac{1}{2} (\mu\ (v + w) - \mu(v) - \mu(w))$$

Note que $v . v = \mu(v)$

De fato:

$$v . v = \frac{1}{2} (\mu\ (v + v) - \mu(v) - \mu(v))$$

$$= \frac{1}{2} (\Sigma\ \ell_i(2v)\ \ell_i'(2v) - 2\, \Sigma\, \ell_i(v)\ \ell_i'(v))$$

$$= 2\, \Sigma\, \ell_i(v)\ \ell_i'(v) - \Sigma\, \ell_i(v)\ \ell_i'(v)$$

$$= \Sigma\ \ell_i(v)\ \ell_i'(v) = \mu(v)$$

A função quadrática μ é chamada positiva definida se $\mu(v) > 0$ para $v \neq 0$.

<u>Definição 2.7</u>:

Um espaço vetorial Euclidiano é um espaço vetorial real V com uma função quadrática positiva definida $\mu: V \to R$.

O número real $v . w$ é chamado o produto interno dos vetores v e w.

O número $v . v = \mu(v)$ poderá também ser denotado por $|v|^2$.

Definição 2.8:

Um fibrado Euclidiano é um fibrado real ξ junto com uma função contínua $\mu: E(\xi) \to R$ tal que a restrição de μ para cada fibra de ξ é definida positiva e quadrática.

À função μ chamaremos uma métrica Euclidiana no fibrado ξ.

No caso do fibrado tangente τ_M de uma variedade diferenciável, uma métrica Euclidiana $\mu: TM \to R$ é chamada uma métrica Riemanniana e M, juntamente com μ, é chamada uma variedade Riemanniana.

Exemplo:

Para o fibrado trivial ε_B^n pode ser considerada a métrica Euclidiana $\mu(b, x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mu: B \times R^n \longrightarrow R$.

Desde que o fibrado tangente de R^n é trivial, a variedade diferenciável R^n possui uma métrica Riemanniana padrão.

Para toda variedade diferenciável $M \subset R^n$, a composição

$$TM \subset TR^n \xrightarrow{\mu} R$$

define em M uma estrutura de variedade Riemanniana.

Lema 2.4:

Seja ξ um fibrado trivial de dimensão n sobre B e seja μ a métrica Euclidiana em ξ. Então existem n secções $s_1, \ldots, s_n$ de ξ, as quais são normais e ortogonais, de modo que:

$$s_i(b) \cdot s_j(b) = \delta_{ij} \quad \text{(delta de Kronecker)}$$

para cada $b \in B$.

Desta forma, ξ é também um fibrado Euclidiano trivial.

Prova:

Sejam $s_1',\ldots,s_n'$ n secções as quais são linearmente independentes, que não se anulam em nenhum ponto.

Aplicando o processo de Gram - Schmidt para $s_1'(b),\ldots,s_n'(b)$, obtemos uma base ortogonal e normalizando, $s_1(b),\ldots,s_n(b)$ é base ortonormal para $F_b(\xi)$.

Assim, as funções resultantes $s_1,\ldots,s_n$ são contínuas.

CAPÍTULO III

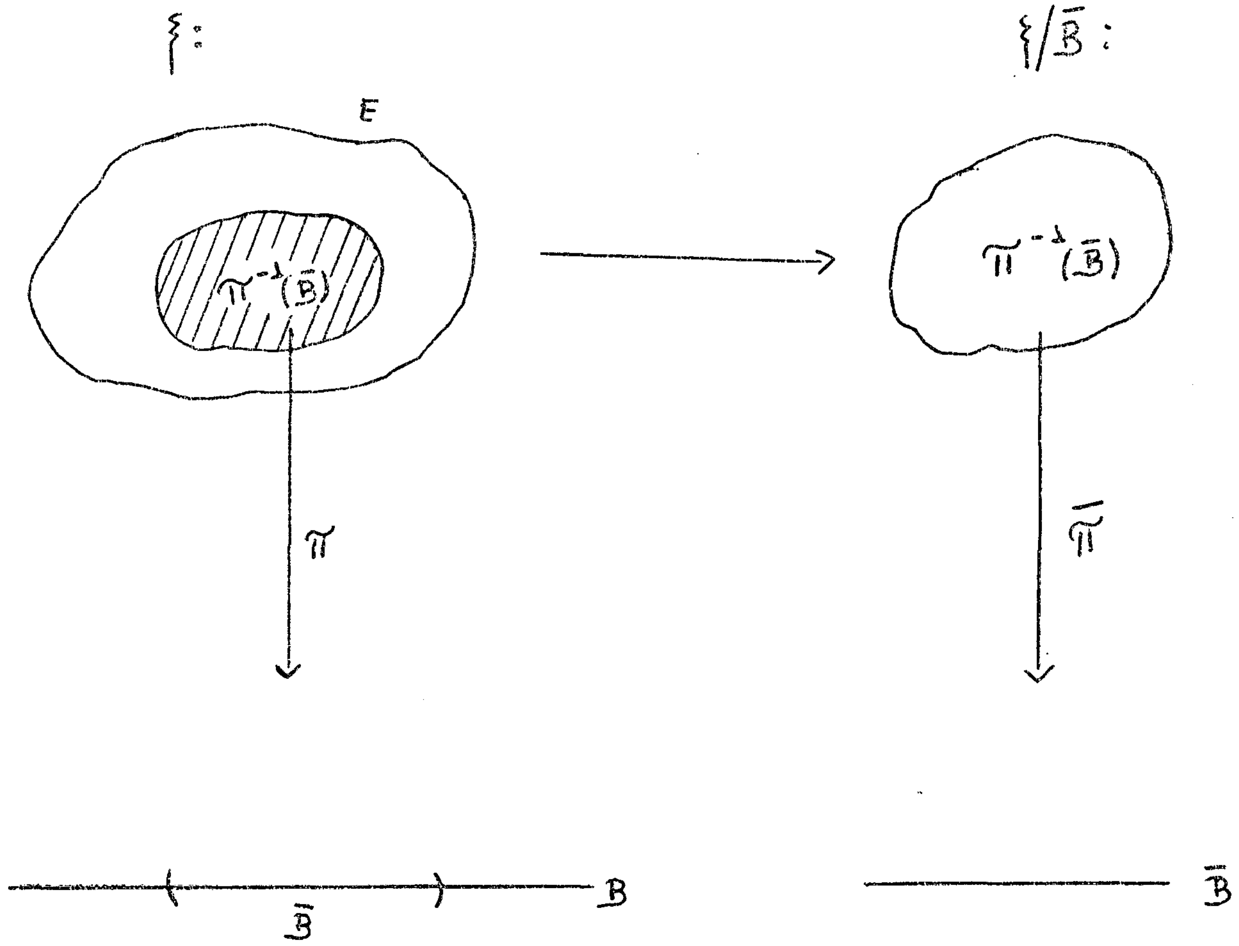
Neste capítulo, descreveremos um número de construções básicas envolvendo fibrados.

a) Restringindo uma fibra para um subconjunto do espaço base.

Seja ξ um fibrado com projeção $\pi: E \to B$ e seja $\bar{B}$ um subconjunto de B.

Fazendo-se $\bar{E} = \pi^{-1}(\bar{B})$ e considerando-se $\bar{\pi}: \bar{E} \to \bar{B}$ como a restrição de π para $\bar{E}$, obtemos um novo fibrado, o qual denotaremos por $\xi/\bar{B}$, e é chamado a restrição de ξ para $\bar{B}$.

Cada fibra $F_b(\xi/\bar{B})$ é igual a fibra correspondente $F_b(\xi)$ e possui a mesma estrutura de espaço vetorial.



b) Fibrados induzidos

Seja ξ um fibrado com projeção $\pi: E \to B$ e seja B_1 um espaço topológico arbitrário.

Consideremos a função:

$$f: B_1 \to B$$

Vamos construir o fibrado induzido $f^*\xi$ sobre B_1.

O espaço total E_1 de $f^*\xi$ é o subconjunto $E_1 \subset B_1 \times E$, formado de todos os pares (b, e) com $f(b) = \pi(e)$. A função projeção $\pi_1: E_1 \to B_1$ é definida por $\pi_1(b, e) = b$.

Logo, teremos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

onde $\hat{f}(b, e) = e$, pois $(\pi \circ \hat{f})(b, e) = \pi(\hat{f}(b, e)) = \pi(e) = f(b)$

e

$(f \circ \pi_1)(b, e) = f(\pi_1(b, e)) = f(b)$.

A estrutura de espaço vetorial em $\pi_1^{-1}(b)$ é definida por

$t_1(b, e_1) + t_2(b, e_2) = (b, t_1e_1 + t_2e_2)$, sendo que $t_1e_1 + t_2e_2$ está bem definido, pois e_1, e_2 são elementos do espaço total E e estão na mesma fibra.

Então; $\hat{f}$ leva cada $F_b(f^*\xi)$ linearmente isomorfo à $F_{f(b)}(\xi)$.

Vamos mostrar que $f^*\xi$ satisfaz a condição de trivialidade local.

Se (U, h) é um sistema de coordenadas locais para ξ, $U_1 = f^{-1}(U)$ e $h_1\colon U_1 \times R^n \to \pi_1^{-1}(U_1)$ é definida por:

$$h_1(b, x) = (b, h(f(b), x)) ,$$

então (U_1, h_1) é um sistema de coordenadas locais para $f^*\xi$.

De fato:

Temos que mostrar que h_1 é um homeomorfismo.

Seja $g\colon \pi_1^{-1}(U_1) \to U_1 \times R^n$ definida por:

$$g(b, e) = (b , P_2\, h^{-1}(e))$$

onde $P_2\colon U \times R^n \to R^n$.

Temos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^{-1}(U_1) \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "g"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[d, "\pi"'] & U \times R^n \arrow[l, "h"'] \arrow[dl, "P_1"'] \arrow[d, "P_2"] \\
U_1 \arrow[r, "f"] & U & R^n
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que h_1 é um homeomorfismo com inversa g.

As funções g e h_1 são contínuas, por serem formadas pela composição de funções contínuas.

Vamos mostrar que:

$$g \circ h_1 = id \qquad e \qquad h_1 \circ g = id ,$$

sabendo-se que $f(b) = \pi(e)$.

$$(g \circ h_1)(b, x) = g(h_1(b, x)) =$$

$$= g(b, h(f(b), x)) =$$

$$= (b, P_2\, h^{-1}(f(b), x)) =$$

$$= (b, P_2\, h^{-1}(\pi(e), x)) =$$

$$= (b, P_2\, h^{-1}(P_1\, (h(e)), x)) =$$

$$= (b, P_2\, h^{-1}(h(e), x)) =$$

$$= (b, P_2\, (e, x)) =$$

$$= (b, x).$$

e

$$(h_1 \circ g)(b, e) = h_1(g(b, e)) =$$

$$= h_1(b, P_2\, h^{-1}(e)) =$$

$$= (b, h(f(b), P_2\, h^{-1}(e)) =$$

$$= (b, h(\pi(e), P_2\, h^{-1}(e)) =$$

$$= (b, h(P_1\, (h^{-1}(e), P_2\, h^{-1}(e)) =$$

$$= (b, h(h^{-1}(e)) =$$

$$= (b, e)$$

Logo $f^*\xi$ é localmente trivial.

<u>Observação</u>:

Se ξ é um fibrado diferenciável e f é uma função dife - renciável, então podemos mostrar que E_1 é uma subvariedade dife -

renciável de $B_1 \times E$, e assim $f^*\xi$ é também um fibrado diferenciá - vel.

Definição 3.1:

Sejam ξ e η fibrados.

Uma função fibrado de η em ξ é uma função contínua

$$g: E(\eta) \to E(\xi)$$

a qual leva cada $F_b(\eta)$ isomorficamente sobre $F_{b'}(\xi)$.

Fazendo-se $\bar{g}(b) = b'$, a função resultante

$$\bar{g}: B(\eta) \longrightarrow B(\xi)$$

é contínua.

Lema 3.1:

Se $g: E(\eta) \to E(\xi)$ é uma função fibrado e se a função contínua $\bar{g}: B(\eta) \to B(\xi)$ é a função correspondente dos espaços bases, então η é isomorfo ao fibrado induzido $\bar{g}^*\xi$.

Prova:

$$\begin{tikzcd} E(\eta) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & E(\xi) \arrow[d, "\pi_1"] \\ B(\eta) \arrow[r, "\bar{g}"] & B(\xi) \end{tikzcd}$$

Seja $h: E(\eta) \to E(\bar{g}^*\xi)$ definida por: $h(e) = (\pi(e), g(e))$

onde π é a função projeção de η.

Temos que h é uma função contínua pois, π é a função projeção, logo contínua, e g é a função fibrado, que também é contínua.

Desde que h é contínua e cada fibra $F_b(\eta)$ está linearmente isomorfa com a fibra $F_b(\bar{g}^*\xi)$, segue do lema 2.3, que hé é um isomorfismo.

c) <u>Produto Cartesiano</u>

Sejam ξ_1 e ξ_2 fibrados, com funções projeções $\pi_1: E_1 \to B_1$ e $\pi_2: E_2 \to B_2$.

O produto cartesiano $\xi_1 \times \xi_2$ é definido como sendo um fibrado, como função projeção

$$\pi_1 \times \pi_2: E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$$

onde cada fibra

$$(\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(b_1, b_2) = F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$$

possui a estrutura de espaço vetorial usual.

d) <u>Soma de Whitney</u>

Consideremos dois fibrados ξ_1 e ξ_2 sobre um mesmo espaço base B.

Seja $d: B \to B \times B$ o mergulho na diagonal.

O fibrado $d^*(\xi_1 \times \xi_2)$ sobre B é chamado a soma de Whitney de ξ_1 e ξ_2, e denotaremos por $\xi_1 + \xi_2$.

Cada fibra $F_b(\xi_1 + \xi_2)$ é canonicamente isomorfa à soma direta $F_b(\xi_1) + F_b(\xi_2)$.

$$\begin{tikzcd}
d^{-1}(E_1 \times E_2) \arrow[r, "d^*"] \arrow[d, "\xi_1 \oplus \xi_2"'] & E_1 \times E_2 \arrow[d, "\pi_1 \times \pi_2"] \\
B \arrow[r, "d"] & B \times B
\end{tikzcd}$$

Definição 3.2:

Sejam os fibrados ξ e η sobre algum espaço base B, com $E(\xi) \subset E(\eta)$. Então ξ é um sub-fibrado de η (escreve-se $\xi \subset \eta$), se cada fibra $F_b(\xi)$ é um subespaço vetorial da fibra correspondente $F_b(\eta)$.

Lema 3.2:

Sejam ξ_1 e ξ_2 sub-fibras de η, tal que cada espaço vetorial $F_b(\eta)$ é igual a soma direta dos subespaços $F_b(\xi_1)$ e $F_b(\xi_2)$. Então η é isomorfo à soma de Whitney $\xi_1 \oplus \xi_2$.

Prova:

$F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$

Seja $f\colon E(\xi_1 \oplus \xi_2) \to E(\eta)$ dada por:

$$f(b, e_1, e_2) = e_1 + e_2$$

Pelo lema 2.3, temos que f é um homeomorfismo.

Logo $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$

Definição 3.3:

Uma métrica Euclidiana é uma função d: $R^n \times R^n \to R$, que a cada par ordenado de elementos $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $y = (y_1,\ldots,y_n)$ de R^n, associa um número real, denotado por:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

chamado a distância de x ã y, satisfazendo as seguintes condições:

1) $d(x, x) = 0$

2) se $x \neq y$; $d(x, y) > 0$

3) $d(x, y) = d(y, x)$

4) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

e) Complemento Ortogonal

Isto sugere a seguinte questão: Considere uma sub-fibra $\xi \subset \eta$, existe uma sub-fibra complementar, de modo que η se decompõe como soma de Whitney?

Se η é provido de uma métrica Euclidiana, então a soma complementar pode ser construída como segue:

Seja $F_b(\xi^1)$ o subespaço de $F_b(\eta)$, formado de todos os vetores v tal que $v \cdot w = 0$, para todo $w \in F_b(\xi)$, isto é:

$$F_b(\xi^1) = \{v \in F_b(\eta) \;/\; v \cdot w = 0 \quad \forall w \in F_b(\xi)\}$$

Teorema 3.1:

Seja $E(\xi^1) \subset E(\eta)$ a união dos $F_b(\xi^1)$. $E(\xi^1)$ é o espaço total de um sub-fibrado $\xi^1 \subset \eta$ e η é isomorfo a soma de Whitney $\xi \oplus \xi^1$.

Prova:

Cada espaço vetorial $F_b(\eta)$ é soma direta dos subespaços $F_b(\xi)$ e $F_b(\xi^1)$; isto é:

$$F_b(\xi) \cap F_b(\xi^1) = \{\vec{0}\} \qquad \text{e}$$

$$F_b(\xi) + F_b(\xi^1) = F_b(\eta)$$

Então devemos mostrar que ξ^1 satisfaz a condição de trivialidade local.

Consideremos um ponto $b_o \in B$ e U uma vizinhança de b_o, a qual é suficientemente pequena, na qual ξ/U e η/U são triviais.

Sejam $s_1,\ldots,s_m$ secções ortogonais normais de ξ/U e $s_1',\ldots,s_n'$ secções ortogonais normais de η/U, onde m e n são respectivamente as dimensões das fibras (comparar com lema 2.4).

Então a matriz $m \times n$

$[s_i(b_o) \cdot s_j'(b_o)]$ $m \times n$ tem posto m, pois os s_i, $i = 1,\ldots,n$ são todos não-nulos (linearmente independentes).

Seja $V \subset U$ um conjunto aberto formado de todos os pontos b, para os quais, as primeiras m colunas da matriz $[s_i(b) \cdot s_j'(b)]$ são linearmente independentes.

Então as n secções $s_1,\ldots,s_m$, $s_{m+1}',\ldots,s_n'$ de η/U são linearmente independentes.

(Para uma relação linear, implicaria que a mesma combinação linear de $s_1(b),\ldots,s_m(b)$, será também uma combinação linear de $s_{m+1}'(b),\ldots,s_n'(b)$, portanto ortogonal para $s_1'(b),\ldots,s_m'(b)$)

Aplicando o processo de Gram-Schmidt para esta seqüência de secções, obtemos secções ortogonais e normais.

$s_1,\ldots,s_m$, $s_{m+1},\ldots,s_n$ de η/U.

Um sistema de coordenadas locais para $\xi^{\perp}$ é dado por:

$$h: V \times R^{n-m} \to E(\xi^{\perp})$$

$$h(b, x) = x_1 s_{m+1}(b) + \ldots + x_{n-m} s_n(b)$$

Pela equação:

$$h^{-1}(e) = (\pi(e), (e\ s_{m+1}(\pi(e)),\ldots,e\ s_n(\pi(e)))$$

temos que h é um homeomorfismo.

Logo $\eta = \xi \oplus \xi^{\perp}$.

<u>Definição 3.4</u>:

$\xi^{\perp}$ é chamado o complemento ortogonal de ξ em η.

<u>Definição 3.5</u>:

Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M, é uma lei que faz corresponder a cada ponto p de M, um produto interno $<,>_p$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $X: U \subset R^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com

$$X(x_1,\ldots,x_n) = q \in X(U) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\,X\,(0,\ldots, 1,\ldots,0) ,$$

então $< \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) >_p$ é igual à $g_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$ e é uma função diferenciável em U.

Definição 3.6:

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana, chama-se uma variedade Riemanniana.

Definição 3.7:

Sejam $M \subset N \subset R^m$ variedades diferenciáveis e suponhamos que N possui uma métrica Riemanniana.

Então o fibrado tangente τ_M é uma subvariedade da restrição $\tau_{N/M}$.

O complemento ortogonal $\tau_M^{\perp} \subset \tau_{N/M}$ é chamado o fibrado normal ν de M em N.

Corolário 3.1:

Para qualquer subvariedade diferenciável M de uma variedade Riemanniana N, o fibrado normal ν é definido e

$$\tau_M \oplus \nu \cong \tau_{N/M} .$$

Prova:

Seja $M \subset N$ e $\tau_M \subset \tau_{N/M}$.

Seja $\tau_M^{\perp} = \nu$.

Então, pelo teorema 3.1, temos:

$$\tau_M \oplus \nu = \tau_{N/M} .$$

Definição 3.8:

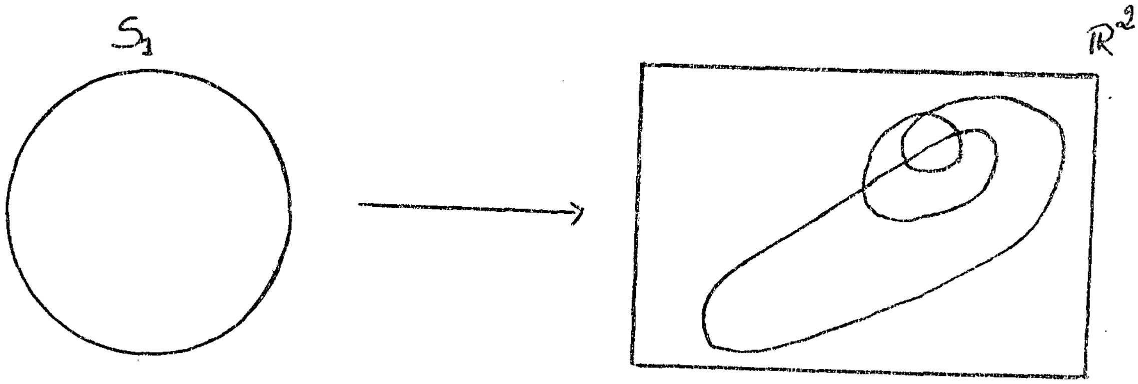
Uma função diferenciável $f: M \to N$, entre variedades diferenciáveis, é chamada uma imersão, se o jacobiano

$$Df_x: DM_x \rightarrow DN_{f(x)}$$

é uma função injetiva do espaço tangente DM_x (isto é, possui núcleo zero), para cada $x \in M$.

Exemplo:

Imersão típica do círculo no plano:



Corolário 3.2:

Para qualquer imersão $f: M \rightarrow N$, com N Riemanniana, existe uma decomposição em soma de Whitney

$$f^* \tau_N = \tau_M \oplus \nu_f \quad ,$$

onde ν_f é chamado o fibrado normal da imersão f.

Prova:

Pelo teorema 3.1, temos:

$$\nu_f \subset f^* \tau_N$$

Logo, $f^*\tau_N = \tau_M \oplus \nu_f$.

Teorema 3.2:

Para cada $b \in B$, seja $F_b = T(F_b(\xi_1),\dots,F_b(\xi_k))$, onde $\xi_1,\dots,\xi_k$ são fibrados sobre um mesmo espaço base B.

Seja E a união disjunta de espaços vetoriais F_b, e definimos $\pi\colon E \to B$ por $\pi(F_b) = b$.

Então existe uma topologia canônica para E, tal que E é o espaço total de um fibrado com projeção π e fibras F_b.

Este fibrado será denotado por $T(\xi_1,\dots,\xi_k)$.

Observação:

Partindo-se com o funtor dual $V \to \mathrm{Hom}\,(V, R)$, obtemos o funtor $\xi \to \mathrm{Hom}\,(\xi, \varepsilon^1)$, o qual associa o seu fibrado no fibrado dual.

Vamos mostrar como construí-lo e que é uma fibração.

Seja ξ um fibrado com projeção $\pi\colon E \to M$ tal que $\pi^{-1}(b) = F$ possui estrutura de espaço vetorial.

Seja $\pi^{-1}(b)^* = \mathrm{Hom}\,(\pi^{-1}(b), R)$

Então:

$$\tilde{E} = \mathrm{Hom}\,(\xi, \varepsilon^1) = \bigcup_{b \in M} \pi^{-1}(b)^* \text{ (disjunta) } =$$

$$= \bigcup_{b \in M} \mathrm{Hom}\,(\pi^{-1}(b), R)\ , \text{ onde}$$

$\tilde{\pi}\colon \tilde{E} \to M$ e seja

$v_b \in \mathrm{Hom}\,(\pi^{-1}(b), R)$

Então:

$\tilde{\pi}(v_b) = b$ e

$\tilde{\pi}^{-1}(b) = \pi^{-1}(b)^* = \text{Hom}\ (\pi^{-1}(b), R).$

Sejam os diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} \tilde{\pi}^{-1}(U) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

e, para cada b, existe V e Ψ, tais que:

$$\begin{tikzcd} \tilde{\pi}^{-1}(V) \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V \times F \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

com $\Psi \circ \pi_2 = \pi$ e $\pi_2 \circ (\Psi/\pi^{-1}(b))$ linear.

Então:

$\tilde{\pi}^{-1}(V) \overset{\psi}{\to} V \times F$

$\psi(v_b) = \Psi \circ f_b(v_b) = \Psi(x_b) =$

$= (b, \Psi_b(x_b)).$

onde

$v_b = x_b^*$ e $x_b \in \pi^{-1}(b)$ e

$f_b\colon v_b \to x_b$.

Vamos mostrar que ψ é um homemorfismo.

De fato:

1) ψ é contínua, pela definição de ψ.

2) $\psi \circ \pi_1 = \tilde{\pi}$, pois o diagrama é comutativo.

3) $\pi_2 \circ (\psi / \tilde{\pi}^{-1}(b)) = \Psi_b \circ f_b =$

$= (\pi_2 \ \Psi) \circ f_b$.

4) ψ é injetiva, pela definição de ψ.

5) ψ é aberta.

Logo $\xi \ \to \text{Hom}\ (\xi, \varepsilon^1)$ é uma fibração.

CAPÍTULO IV

CLASSES DE STIEFEL - WHITNEY

A expressão $H^i(B, G)$ denota o i-ésimo grupo do anel da cohomologia singular de B, com coeficientes em G.

Nesta seção, se não notada ao contrário, o grupo dos coeficientes será Z/2; o grupo dos inteiros módulo 2.

Iremos ver agora os axiomas para as classes características de Stiefel - Whitney.

Axioma 1:

Para cada fibrado ξ, existe uma seqüência correspondente de classes de cohomologia

$$w^i(\xi) \in H^i(B(\xi);\ Z/2)$$

$i = 0,1,2,\ldots,$ chamada a classe de Stiefel - Whitney de ξ.

A classe $w_o(\xi)$ é igual ao elemento unidade

$$1 \in H^o(B(\xi);\ Z/2 \qquad \text{e}$$

$w_i(\xi)$ é zero para $i > n$; se ξ é um n-plano fibrado.

Axioma 2: Naturalidade

Se $f\colon B(\xi) \to B(\eta)$ é coberto por uma função fibrado de ξ em η, então:

$$w_i(\xi) = f^* w_i(\eta)$$

Axioma 3: Teorema do produto de Whitney.

Se ξ e η são fibrados sobre o mesmo espaço base, então

$$w_k\,(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi) \cup w_{k-i}(\eta)$$

Por exemplo:

para k = 1

$$w_1(\xi \oplus \eta) = w_o(\xi)\ w_1(\eta) + w_1(\xi)\ w_o(\eta)$$

ou

$$w_1(\xi \oplus \eta) = w_1(\xi) + w_1(\eta)$$

para k = 2.

$$w_2(\xi \oplus \eta) = w_o(\xi)\ w_2(\eta) + w_1(\xi)\ w_1(\eta) + w_2(\xi)\ w_o(\eta)$$

ou

$$w_2(\xi \oplus \eta) = w_2(\xi) + w_1(\eta)\ w_1(\xi) + w_2(\eta)$$

Axioma 4:

Para o fibrado linear γ_1^1 sobre o círculo P^1, a classe de Stiefel - Whitney é diferente de zero.

Conseqüências dos 4 axiomas

Como conseqüências imediatas do axioma 2, temos:

Proposição 1:

Se ξ é isomorfo à η, então $w_i(\xi) = w_i(\eta)$

Prova:

Se $\xi \cong \eta$, então existe uma função $f: E(\xi) \to E(\eta)$, homeomorfismo, com

$$F_b(\xi) \cong F_b(\eta)$$

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\eta) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ B(\xi) & \xrightarrow{id} & B(\eta) \end{array}$$

Pelo axioma 2, temos:

$$w_i(\xi) = id^* \, w_i(\eta) = w_i(\eta)$$

Proposição 2:

Se ε é o fibrado trivial, então $w_i(\varepsilon) = 0$ para $i > 0$.

Prova:

Pelo axioma 1, as classes de Stiefel - Whitney em um ponto é zero.

Como ε é trivial, então existe uma função fibrado $f: \varepsilon \to \eta$ onde $B(\eta)$ é um ponto.

Logo, se $i > 0$,

$$w_i(\xi) = f^* \, w_i(\eta) = f^*(0) = 0$$

Proposição 3:

Se ε é trivial, então:

$$w_i(\varepsilon \oplus \eta) = w_i(\eta)$$

Prova:

$$w_k(\varepsilon \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\varepsilon) \cup w_{k-i}(\eta)$$

Mas como ε é trivial, temos que $w_i(\varepsilon) = 0$ para $i > 0$, logo: $w_i(\varepsilon \oplus \eta) = w_i(\eta)$.

Proposição 4:

Se ξ é um R^n - fibrado com uma métrica Euclidiana, a qual não possui secção não-nula, então $w_n(\xi) = 0$

Prova:

Se ξ possui k secções, as quais são linearmente independentes, então:

$$w_{n-k+1}(\xi) = w_{n-k+2}(\xi) = \dots = w_n(\xi) = 0$$

Isto segue do teorema 3.1; ξ se fatora como uma soma de Whitney $\varepsilon \oplus \varepsilon^{\perp}$, onde ε é trivial e $\varepsilon^{\perp}$ tem dimensão $n - k$, isto é, $\xi = \varepsilon \oplus \varepsilon^{\perp}$.

Como ε é trivial, então $w_i(\varepsilon) = 0$ para $i > 0$ e $w_i(\varepsilon \oplus \eta) = w_i(\eta)$.

Logo:

$$w_i(\xi) = w_i(\varepsilon \oplus \varepsilon^{\perp}) = w_i(\varepsilon^{\perp})$$

Um caso particular interessante do teorema do produto de Whitney, ocorre quando a soma de Whitney $\xi \oplus \eta$ é trivial.

Então a relação:

$$w_1(\xi) + w_1(\eta) = 0$$

$$w_2(\xi) + w_1(\xi)\, w_1(\eta) + w_2(\eta) = 0$$

$$w_3(\xi) + w_2(\xi)\, w_1(\eta) + w_1(\xi)\, w_2(\eta) + w_3(\eta) = 0$$

etc.

pode ser resolvida, de modo que $w_1(\eta)$ é expresso como um polinômio nas classes de Stiefel - Whitney de ξ.

Definição 4.1:

$H^{\pi}(B;\, Z/2)$ denotará o anel formado de todas as séries infinitas formais:

$$a = a_o + a_1 + a_2 + \dots \quad \text{com} \quad a_i \in H^i(B;\, Z/2)$$

A operação produto neste anel será dado pela fórmula

$$(a_o + a_1 + a_2 + \dots) + (b_o + b_1 + b_2 + \dots) =$$

$$= (a_o\, b_o) + (a_1 b_o + a_o b_1) + (a_2 b_o + a_1 b_1 + a_o b_2) + \dots$$

Este produto é comutativo (desde que trabalhando com inteiro módulo 2) e associativo.

O grupo $H^{\pi}(B;\, Z/2)$ é o produto cartesiano dos grupos $H^i(B;\, Z/2)$.

A classe total de Stiefel - Whitney de um n-plano fibrado ξ sobre B é definido pelo elemento

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \dots + w_n(\xi) + 0 + \dots$$

neste anel.

O teorema do produto de Whitney pode agora ser expresso pela fórmula

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \cdot w(\eta)$$

<u>Lema 4.1</u>:

A coleção de todas as séries infinitas

$$w = 1 + w_1 + w_2 + \ldots \in H^{\pi}(B;\ Z/2)$$

com o termo 1, forma um grupo comutativo sob a multiplicação.

(Isto é precisamente o grupo de unidades do anel $H^{\pi}(B;\ Z/2)$).

<u>Prova</u>:

Seja $w \in H^{\pi}(B;\ Z/2)$

Temos o algorítmo:

$$\bar{w}_n = w_1\ \bar{w}_{n-1} + w_2\ \bar{w}_{n-2} + \ldots + w_n$$

Então, por indução, teremos:

1) $\bar{w}_1 = w_1$

2) $\bar{w}_2 = w_1\ \bar{w}_1 + w_2$

$\bar{w}_2 = w_1\ w_1 + w_2$

$\bar{w}_2 = w_1^2 + w_2$

3) $\bar{w}_3 = w_1\ \bar{w}_2 + w_2\ \bar{w}_1 + w_3$

$\bar{w}_3 = w_1 \cdot (w_1^2 + w_2) + w_2\ w_1 + w_3$

$\bar{w}_3 = w_1^3 + w_1\ w_2 + w_2\ w_1 + w_3$

Mas $w_1 w_2 = - w_2 w_1$

logo:

$$\bar{w}_3 = w_1^3 + w_3.$$

4) $\bar{w}_4 = w_1 \bar{w}_3 + w_2 \bar{w}_2 + w_3 \bar{w}_1 + w_4$

$$\bar{w}_4 = w_1(w_1^3 + w_3) + w_2(w_1^2 + w_2) + w_3 w_1 + w_4$$

$$\bar{w}_4 = w_1^4 + w_1 w_3 + w_2 w_1^2 + w_2^2 + w_3 w_1 + w_4$$

Como $w_1 w_3 = - w_3 w_1$

Logo:

$$\bar{w}_4 = w_1^4 + w_2 w_1^2 + w_2^2 + w_4$$

e assim sucessivamente.

Então o inverso de

$w = 1 + w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$ é

$$\bar{w} = 1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 + \ldots$$

Alternativamente, $\bar{w}$ pode ser calculado por uma expansão das séries de potência:

$$\bar{w} = [1 + (w_1 + w_2 + \ldots)]^{-1} =$$

$$= 1 - (w_1 + w_2 + \ldots) + (w_1 + w_2 + \ldots)^2 - (w_1 + w_2 + \ldots)^3 =$$

$$= 1 - w_1 + (w_1^2 - w_2) + (- w_1^3 + 2w_1 w_2 - w_3) + \ldots$$

(onde os sinais são desnecessários, já que o grupo é $Z/2$).

Isto leva à expressão:

$\dfrac{(i_1 + \ldots + i_k)!}{i_1! \ldots i_k!}$ para os coeficientes de $w_1^{i_1}, w_2^{i_2}, \ldots, w_k^{i_k}$ em $\bar{w}$

Consideremos agora dois fibrados ξ e η sobre algum espaço base.

Segue do lema 4.1, que a equação $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)\, w(\eta)$ pode ser resolvida como:

$$w(\eta) = \bar{w}(\xi) \,.\, w(\xi \oplus \eta)$$

Em particular, se $\xi \oplus \eta$ é trivial, então $w(\eta) = \bar{w}(\xi)$.

Corolário 4.1:

Se τ_M é o fibrado tangente de uma variedade, no espaço Euclidiano e v é o fibrado normal, então:

$$w_i(v) = \bar{w}_i(\tau_M)$$

Prova:

$\tau_M + v =$ trivial sobre M.

Exemplo 1:

Para o fibrado tangente τ da esfera unitária S^n, a classe $w(\tau) = w(S^n)$ é igual a 1.

Prova:

Para o mergulho padrão $S^n \subset R^{n+1}$, o fibrado normal v é trivial.

Sabemos que:

$$w(\tau) = w(\tau \oplus v) = w(\tau) \,.\, w(v)$$

Mas $w(\tau) \,.\, w(v) = 1$ e $w(v) = 1$.

Portanto temos que $w(\tau) = 1$.

Lema 4.2:

O grupo $H^i(P^n; Z/2)$ é cíclico de ordem 2, para $0 \leqslant i \leqslant n$ e é zero para $i > n$.

Além disso, se $\underline{a}$ denota o elemento diferente de zero de $H^1(P^n; Z/2)$, então cada $H^i(P^n; Z/2)$ é generalizado pelo i-ésimo produto cup a^i.

Assim $H^*(P^n; Z/2)$ pode ser descrito como a álgebra com unidade sobre $Z/2$, tendo um gerador $\underline{a}$ e uma relação $a^{n+1} = 0$.

Prova:

[Spanier, p. 264]

Observação:

Este lema pode ser usado para calcular o homeomorfismo $f^*\colon H^n(P^n; Z/2) \to H^n(S^n; Z/2)$ desde que $n > 1$.

De fato,

$f^*(a^n) = (f^*a)^n$ é zero desde que $f^*a \in H^1(S^n; Z/2) = 0$.

Exemplo 2:

A classe total de Stiefel - Whitney de um fibrado linear canônico γ_n^1 sobre P^n é dado por:

$$w(\gamma_n^1) = 1 + a .$$

Prova:

A inclusão padrão coberto por $j\colon P^1 \to P^n$ é uma função fibrado de

γ_1^1 em γ_n^1.

Logo:

$$j^* w_1(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_1^1) \neq 0$$

(pelo axioma 2)

Isto mostra que $w_1(\gamma_n^1) \neq 0$.

Desde que $H^1(P^1; Z/2)$ contém somente dois elementos: 0 e $\underline{a}$ e $w_1(\gamma_n^1) \neq 0$, temos que $w_1(\gamma_n^1) = a$.

Pelo axioma 2,

$$w(\gamma_n^1) = w_o + w_1 = w_o + a .$$

Mas $w_o = 1$, portanto $w = 1 + a$.

Exemplo 3:

Por definição, o fibrado linear γ_n^1 sobre P^n é formado como um sub-fibrado no fibrado trivial ε^{n+1}.

Seja $\gamma^\perp$ o complemento ortogonal de γ_n^1 em ε^{n+1}.

Assim o espaço total $E(\gamma^\perp)$ é formado de todos os pares $(\{\pm x\}, v) \in P^n \times R^{n+1}$ com v perpendicular ã x.

Então:

$$w(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$$

Prova:

Como $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$ é trivial, temos:

$w(\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp) = 0$ pela proposição 2.

Então:

$$w(\gamma^\perp) = \bar{w}(\gamma_n^1) \overset{ex:2}{=} (1 + a)^{-1} =$$

$= 1 + a + a^2 + \dots + a^n$ pois, pelo lema 4.1, temos:

$$\bar{w}_n = w_1\bar{w}_{n-1} + \cdots + w_{n-1}\bar{w}_1 + w_n$$

e

$$w = (1 + a) \quad , \quad \text{logo } w = (1 + w_1)$$

$$\bar{w}_1 = w_1 = a$$

$$\bar{w}_2 = w_1^2 + w_2 = a^2 + 0 = a^2$$

$$\bar{w}_3 = w_1^3 + w_3 = a^3 + 0 = a^3$$

$$\bar{w}_4 = w_1^4 + w_1^2 w_2 + w_2^2 + w_4 =$$

$$= a^4 + a^2 . 0 + 0 + 0 = a^4$$

então:

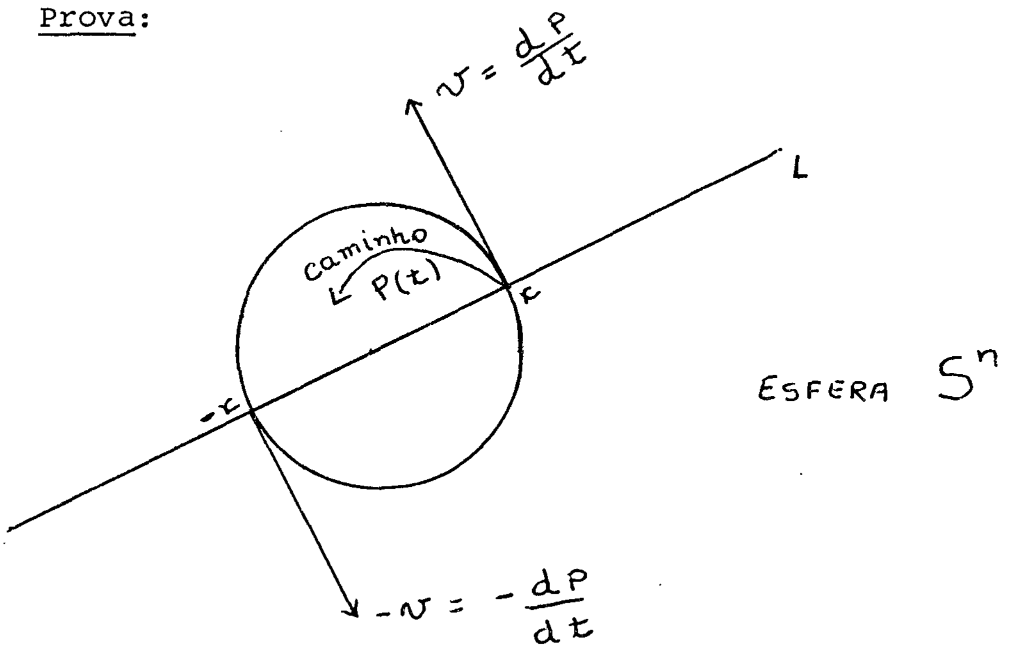
$$\bar{w} = 1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \cdots$$

$$\bar{w} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

Lema 4.3:

O fibrado tangente τ de P^n é isomorfo à Hom $(\gamma_n^1, \gamma^{\perp})$.

Prova:



Seja L a reta que passa pela origem em R^{n+1}, interceptando S^n nos pontos $+x$ e $-x$, e seja $L^{\perp} \subset R^{n+1}$ o n-plano complementar.

Seja $f: S^n \to P^n$ definida por

$$f(x) = \{\pm x\}$$

Os vetores (x, v) e $(-x, -v)$ possuem a mesma imagem sob a função

$$T_f: TS^n \to TP^n \quad ,$$

a qual é induzida por f.

Assim, a variedade tangente TP^n pode ser identificada com o conjunto de todos os pares $\{(x, v) , (-x, -v)\}$ satisfazendo:

$$x \,.\, x = 1 \quad \text{e} \quad x \,.\, v = 0$$

Mas cada par determina e é determinado por uma função linear $\ell : L \to L^{\perp}$, onde

$$\ell(x) = v \,.$$

Assim, o espaço tangente de P^n em $\{\pm x\}$ é isomorfo ao espaço vetorial Hom $(L, L^{\perp})$.

Logo, o fibrado tangente τ é isomorfo ao fibrado

$$\mathrm{Hom}\,(\gamma_n^1 , \gamma^{\perp}).$$

Teorema 4.1:

A soma de Whitney $\tau \oplus \varepsilon^1$ é isomorfo ã $(n + 1)$ - soma de Whitney $\gamma_n^1 \oplus \gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1$.

Assim, a classe total de Stiefel - Whitney de P^n é dada por:

$$w(P^n) = (1 + a)^{n+1} =$$

$$= 1 + \binom{n+1}{1} a + \binom{n+1}{2} a^2 + \ldots + \binom{n+1}{n} a^n$$

Prova:

A fibra Hom (γ_n^1, γ_n^1) é trivial desde que esta seja um fibrado linear com uma secção canônica não-zero.

Portanto:

$$\tau \oplus \varepsilon^1 \cong \text{Hom}\,(\gamma_n^1, \gamma^\perp) \oplus \text{Hom}\,(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$$

$$\cong \text{Hom}\,(\gamma_n^1, \gamma^\perp \oplus \gamma_n^1)$$

Logo:

$$\text{Hom}\,(\gamma_n^1, \gamma^\perp \oplus \gamma_n^1) \cong \text{Hom}\,(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1})$$

pois, pelo exemplo 3,

$$\varepsilon^{n+1} = \gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$$

e portanto

$$\text{Hom}\,(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1}) =$$

$$= \text{Hom}\,(\gamma_n^1, \varepsilon^1 \oplus \varepsilon^1 \oplus \ldots \oplus \varepsilon^1) \cong$$

$$\cong \text{Hom}\,(\gamma_n^1, \varepsilon^1) \oplus \ldots \oplus \text{Hom}\,(\gamma_n^1, \varepsilon^1)\ .$$

Mas o fibrado Hom $(\gamma_n^1, \varepsilon^1)$ é isomorfo à γ_n^1, desde que γ_n^1 tem uma métrica Euclidiana.

Logo:

$$\gamma \oplus \hat{\varepsilon} \cong \text{Hom}\,(\gamma_n^1, \gamma^1 \oplus \gamma_n^1) \cong$$

$$\cong \text{Hom}\ (\gamma_n^1,\ \varepsilon^{n+1}) \cong$$

$$\cong \text{Hom}\ (\gamma_n^1,\ \varepsilon^1) \oplus \ldots \oplus \text{Hom}\ (\gamma_n^1,\ \varepsilon^1) \cong$$

$$\cong \gamma_n^1 \oplus \gamma_n^1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n^1$$

Note que, o teorema do produto de Whitney, implica que:

$$w(\tau) = w(\tau \oplus \varepsilon^1) =$$

$$= w(\gamma_n^1)\ .\ \ldots\ .\ w(\gamma_n^1) = (1 + a)^{n+1}$$

Pelo teorema do binômio, temos:

$$w(P^n) = (1 + a)^{n+1} =$$

$$= 1 + \binom{n+1}{1}a + \binom{n+1}{2}a^2 + \ldots + \binom{n+1}{n}a^n$$

<u>Tabela dos coeficientes binomiais $\binom{n+1}{i}$ módulo 2, para $n \leq 14$; $i = 1,2,\ldots,13$</u>

$$w(P^1) = (1 + a)^2 = 1 + 2a/\text{mód } 2$$

logo: $w(P^1) = 1$

$$w(P^2) = (1 + a)^3 = 1 + 3a + 3a^2/\text{mód } 2$$

logo: $w(P^2) = 1 + a + a^2$

$$w(P^3) = (1 + a)^4 = 1 + 4a + 6a^2 + 4a^3/\text{mód } 2$$

logo: $w(P^3) = 1.$

etc.

Logo:

1

1 1

1 0 1 P^1

1 1 1 1 P^2

1 0 0 0 1 P^3

1 1 0 0 1 1 P^4

1 0 1 0 1 0 1 P^5

1 1 1 1 1 1 1 1 P^6

1 0 0 0 0 0 0 0 1 P^7

1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 P^8

1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 P^9

1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 P^{10}

1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 P^{11}

1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 P^{12}

1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 P^{13}

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 P^{14}

Corolário 4.2: (Stiefel)

A classe $w(P^n)$ é igual a 1 se e somente se, $n + 1$ é uma potência de 2.

Assim, os únicos espaços projetivos que podem possivelmente ser paralelizáveis são:

$$P^1 \; ; \; P^3 \; ; \; P^7 \; ; \; P^{15} \; ; \; \ldots$$

Prova:

Temos que:

$(a + b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)/\text{mód } 2 = a^2 + b^2$

Logo $(1 + a)^{2^r}/\text{mód } 2 = 1 + a^{2^r}$

Se $n + 1 = 2^r$, então

$w(P^n) = (1 + a)^{n+1}/\text{mód } 2 = 1 + a^{n+1}/\text{mód } 2.$

Logo $w(P^n) = 1.$

Reciprocamente, se $n + 1 = 2^r\, m$, com m ímpar, $m > 1$, então

$$w(P^n) = (1 + a)^{n+1} = (1 + a)^{2^r . m} =$$

$$= ((1 + a)^{2^r})^m = (1 + a^{2^r})^m =$$

$$= 1 + m\, a^{2^r} + \frac{m(m - 1)\; a^{2.2^r}}{2} + \ldots /\text{mód } 2 =$$

$$= 1 + m/\text{mód } 2 \, . \, a^{2^r} + \ldots \neq 1$$

onde $2^r < n + 1$.

logo, se $n + 1$ é uma potência de 2, temos que $w(P^n) = 1$.

<u>Teorema 4.2</u>: (Stiefel)

Suponhamos que exista uma operação produto bilinear

$$p: R^n \times R^n \to R^n$$

sem divisores de zero.

Então o espaço projetivo P^{n-1} é paralelizável, desde que n é uma potência de 2.

<u>Prova</u>:

Seja $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ a base canônica para o espaço vetorial R^n.

A função $f: R^n \to R^n$ definida por $f(y) = p(y, b_1)$ é um isomorfismo de R^n nele mesmo.

Seja $v_i: R^n \to R^n$ uma transformação linear definida por

$$v_i(p(y, b_1)) = p(y, b_i)$$

Vamos mostrar que v_i é uma transformação linear

1) $v_i(p(y_1, b_1) + p(y_2, b_1)) \underset{\text{bilinear}}{\overset{\text{p e'}}{=}}$

$= v_i(p(y_1 + y_2, b_1)) = p(y_1 + y_2, b_i) =$

$\underset{\text{bilinear}}{\overset{\text{p e'}}{=}} p(y_1, b_i) + p(y_2, b_i) =$

$= v_i(p(y_1, b_1)) + v_i\ (p(y_2, b_1))$

2) $v_i(p(ay, b_1)) = p(ay, b_i) =$

$\underset{\text{bilinear}}{\overset{\text{p e'}}{=}} a\ p(y, b_i) = a\ v_i(p(y, b_1)).$

Concluimos então que v_i é uma transformação linear.

Note que $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$ são linearmente independentes para $x \neq 0$ e que $v_1(x) = x$.

De fato:

Seja $x = p(y, b_1)$

$$v_1(x) = v_1(p(y, b_1)) = p(y, b_1) = x$$

e

$$v_2(x) = v_2(p(y, b_1)) = p(y, b_2)$$

$$v_3(x) = v_3(p(y, b_1)) = p(y, b_3)$$

$$\vdots$$

$$v_n(x) = v_n(p(y, b_1)) = p(y, b_n)$$

Como $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ é linearmente independente, então $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$ é linearmente independente.

As funções $v_2, \ldots, v_n$ dão lugar à $n - 1$ secções linearmente independentes do fibrado

$$\tau_{P^{n-1}} \cong \mathrm{Hom}\ (\gamma^1_{n-1}, \gamma^{\perp})$$

De fato:

Para cada reta L que passa pela origem, a transformação linear $\bar{v}_1 : L \to L^{\perp}$ é definida como segue:

para $x \in L$, seja $\bar{v}_i(x)$ a imagem de $v_i(x)$ sobre a projeção ortogonal $R^n \to L^{\perp}$.

Claramente $\bar{v}_1 = 0$, pois $v_1(x) = x \in L \subset R^n$ e a projeção de $x \in L$ em $L^{\perp}$ é a origem.

Logo $\bar{v}_1 = 0$.

Mas $\bar{v}_2(x), \bar{v}_3(x), \ldots, \bar{v}_n(x)$ são linearmente independentes em $L^{\perp}$, isto é, se

$$a_1 \, \bar{v}_2(x) + a_2 \, \bar{v}_3(x) + \ldots + a_{n-1} \, \bar{v}_n(x) = 0$$

temos que $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$, para algum $x \in L$, pois $\bar{v}_i(x) \neq 0$ para $i = 2,3,\ldots,n$.

Logo $\tau_{P^{n-1}}$ é o fibrado tangente trivial. Portanto P^{n-1} é paralelizável.

Imersão:

Como aplicação, perguntamos quais espaços projetivos podem ser imersos no espaço Euclidiano de uma dimensão dada.

Se uma variedade M de dimensão n pode ser imersa no espaço Euclidiano R^{n+k}, então pelo teorema da dualidade de Whitney,

$$w_i(v) = \bar{w}_i(M)$$

implica que as classes duais de Stiefel - Whitney $\bar{w}_i(M)$ são zero para $i > k$.

Como um exemplo típico, consideremos o espaço projetivo real P^9.

Desde que:

$$w(P^9) = (1 + a)^{10} = 1 + a^2 + a^8$$

teremos:

$$\bar{w}(P^9) = 1 + a^2 + a^4 + a^6$$

Assim, se P^9 pode ser imerso em R^{9+k}, então k deve ser pelo menos 6.

Se $n = 2^r$ é uma potência de 2, então:

$$w(P^n) = (1 + a)^{n+1} = 1 + a + a^n$$

logo:

$$\bar{w}(P^n) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$$

<u>Teorema 4.3</u>:

Se P^{2^r} pode ser imerso em R^{2^r+k}, então k deve ser pelo menos $2^r - 1$.

<u>Prova</u>:

Temos que

$$w(P^{2^r}) = (1 + a)^{2^r+1} = 1 + a^2 + a^{2^r}$$

Então

$$\bar{w}(P^{2^r}) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{2^r-1}$$

Logo k deve ser no mínimo $2^r - 1$.

CAPÍTULO V

CONSTRUÇÃO DE ALGUMAS FUNÇÕES BILINEARES NÃO-SINGULARES

Definição 5.1:

Seja ε um conjunto de operadores em um espaço vetorial V. Dizemos que ε "tem propriedade P" se cada combinação linear não-trivial de operadores em ε, é um monomorfismo.

Iremos dar um exemplo não-trivial de "P" em um espaço vetorial V de dimensão infinita. Este exemplo facilita a a obtenção de novas funções biblineares não-singulares, desta forma, proporcionando o cálculo na dimensão geométrica do fibrado sobre o espaço projetivo P^n.

Especificamente, cálculos para problemas de imersão de P^n, iremos obter novamente o resultado de Milgram, mais a imersão de P^n em $R^{2n - \alpha(n)}$, quando $n \equiv 0$ (mód 8).

Notações:

F denotará o espaço dos números reais, complexos, quartenions ou números de Cayley, com $\varepsilon_o (= 1)$; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{d-1}$ (d a dimensão real de F), como base ortonormal. F^m denotará o espaço vetorial (sobre R) das m - uplas de elementos de F.

F^∞ como sendo a união sobre m dos F^m, com produto e norma usual.

Se c e c' são inteiros não-negativos, satisfazendo ã $c \leqslant c'$,

$F(c, c']$ é o complemento ortogonal de F^c em $F^{c'}$.

[t] denotará o maior inteiro, não excedendo o número real t.

$\{t\} = t - [t]$.

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad a \geqslant 0 \\ -1 & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$$

$v(b)$ denotará o maior inteiro h tal que 2^h divide b.

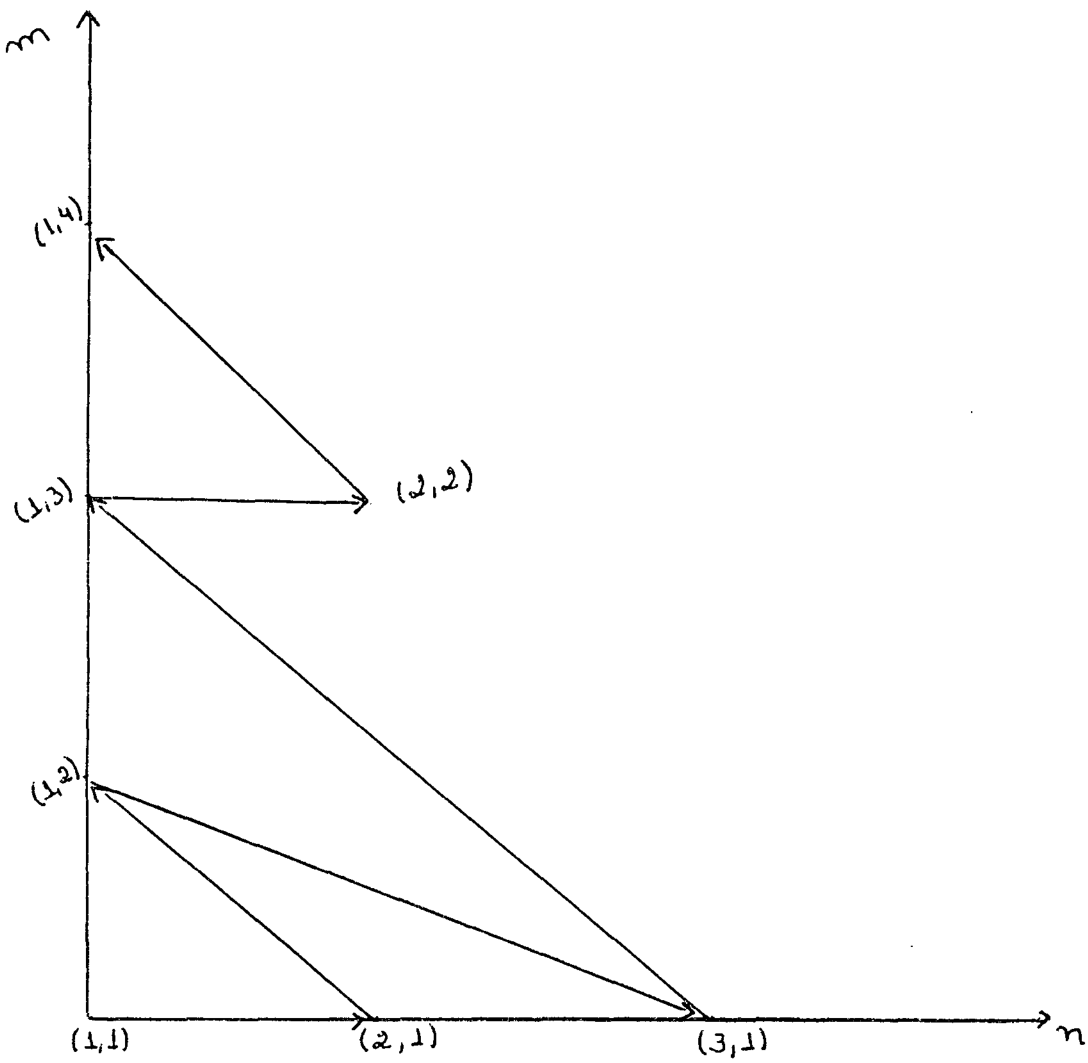
Por convenção $v(0) = \infty$.

$\alpha(n)$ denotará o número de 1 na expansão diádica de n.

Lema 5.1:

$$\sum_{1 \leqslant b \leqslant n} v(b) = n - \alpha(n)$$

Prova:



Sabe-se que cada inteiro positivo k pode ser escrito na forma:

$$k = 2^{n-1}(2m + 1)$$

para um único par de inteiros positivos n e m.

Mostraremos o nosso lema por indução.

Para b = 1, temos:

$v(1) = 0 \quad ; \quad \alpha(1) = 1$ e

$v(1) = 0 = 1 - 1$

logo: $v(b) = n - \alpha(n)$.

Vamos supor que vale para n, isto é, $\sum_{b=1}^{n} v(b) = n - \alpha(n)$.

Vamos mostrar que vale para b = n + 1.

a) Para n par:

Se n é par, então n + 1 é ímpar. Como n + 1 é ímpar, então:

$$v(n + 1) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha(n + 1) = \alpha(n) + 1$$

Logo:

$$\sum_{b=1}^{n+1} v(b) = \sum_{b=1}^{n} v(b) = n - \alpha(n) =$$

$$= n + 1 - \alpha(n) - 1 = (n + 1) - (\alpha(n) + 1) =$$

$$= (n + 1) - \alpha(n + 1)$$

b) Se n é ímpar, então n + 1 é par.

Se $n = 1 \cdot 2^0 + a_1 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + \ldots$ e $a_1 = 0$, então:

$$n + 1 = 0 + 1 \cdot 2^1 + a_2 2^2 + \ldots$$

Assim:

$$\alpha(n) = \alpha(n + 1)$$

Se $a_o = a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 1 \neq a_{p+1} = 0$,

teremos:

$$n + 1 = 0 \,.\, 2^o + 0 \,.\, 2^1 + \ldots + 0 \,.\, 2^p + 1 \,.\, 2^{p+1} +$$

$$+ a_{p+2} \,.\, 2^{p+2} + \ldots$$

Assim:

$$\alpha(n+1) = \alpha(n) - p \quad \text{ou}$$

$$\alpha(n) = \alpha(n + 1) + p$$

Como n é ímpar, então $v(n) = 0$ e pelo exposto acima,

$$v(n + 1) = p + 1.$$

Então:

$$\sum_{b=1}^{n+1} v(b) = \sum_{b=1}^{n} v(b) + v(n + 1) =$$

$$= n - \alpha(n) + v(n + 1) =$$

$$= n - (\alpha(n + 1) + p) + p + 1 =$$

$$= n - \alpha(n + 1) - p + p + 1 =$$

$$= n - \alpha(n + 1) + 1 =$$

$$(n + 1) - \alpha(n + 1).$$

Finalmente, para cada par de inteiros positivos k, h(k > h), definimos um número não-negativo $\tau(k, h)$ como segue:

Sejam: $k = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, 2^j$

$$h = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \, 2^j \qquad \text{e}$$

$$k - h = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \, 2^j$$

as suas expansões diádicas.

Então:

$$\tau(k, h) = \text{Card } \{j \geqslant 0 \;/\; \gamma_j = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_j \neq \beta_j\}$$

Os primeiros valores de $\tau(k, h)$ são dados por:

$$\tau(3, 1) = ?$$

$k = 3$ na base 2 é 11

$h = 1$ na base 2 é 1

$k - h$ na base 2 é 10

$\alpha_j \neq \beta_j$ somente para $j = 1$, mas $\gamma_1 \neq 0$

logo $\tau(3, 1) = 0$.

$$\tau(3, 2) = ?$$

$k = 3$ na base 2 é 11

$h = 2$ na base 2 é 10

$k - h$ na base 2 é 1

$\alpha_j \neq \beta_j$ somente para $j = 0$, mas $\gamma_o \neq 0$

logo $\tau(3, 2) = 0$

$$\tau(2, 1) =$$

$k = 2$ na base 2 é 10

$h = 1$ na base 2 é 1

$k - h$ na base 2 é 1

$\alpha_j \neq \beta_j$ somente para $j = 1$ e $\gamma_1 = 0$, logo $\tau(2, 1) = 1$.

Cálculos fáceis deste tipo, mostra que:

$$\tau(4, 1) = 1$$

$$\tau(4, 2) = 1 \quad \text{e}$$

$$\tau(4, 3) = 2$$

Os Operadores S_b e T_a em F^∞

Definição 5.2:

Para cada inteiro não-negativo b, S_b é definido como o monomorfismo:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) S_b = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b}, x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

Note que, usamos a notação do operador à direita da variável. Com isto, $S_b \circ S_a$ é primeiro S_b depois S_a.

O operador identidade I é representado pelo S_o, desde que não colocado nenhum zero na frente do vetor.

Definição 5.3:

Para $-d < a < 0$, o operador T_a é definido por:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) T_a = (x_1 \varepsilon - a, x_2 \varepsilon - a, x_3 \varepsilon - a, \ldots)$$

Para $a \geqslant 0$, primeiro colocamos $m = 2^a$ e decompomos F^∞ na soma direta:

$$F^\infty = \bigoplus_{k \geqslant 0} F(km, (k + 1)m]$$

Então definimos T_a como o operador que atua sobre cada

$F(km, (k+1)m]$, do seguinte modo:

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+1}, \ldots, x_{km+m}, 0, \ldots)\, T_a =$$

$$= (-1)^k\, (\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+m}, \ldots, x_{km+1}, 0, \ldots)$$

Exemplos:

1) $\underline{T_o}$:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, T_o = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \ldots)$$

2) $\underline{T_1}$:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, T_1 = (x_2, x_1, -x_4, -x_3, x_6, x_5 \ldots)$$

3) $\underline{T_2}$:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, T_2 = (x_4, x_3, x_2, x_1, -x_8, -x_7 \ldots)$$

Propriedades:

1) Cada T_a com $a > -d$ é uma isometria.

Prova:

Vamos mostrar que $\| x \| = \| T_a(x) \|$

$$\| x \| = \| (x_1, x_2, x_3, \ldots) \| =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots$$

e

$$\| x\, T_a \| = \| (\ldots, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1, \ldots) \| =$$

$$= \ldots + x_n^2 + x_{n-1}^2 + \ldots + x_2^2 + x_1^2$$

2) $T_a^2 = \operatorname{sgn}(a) \, . \, I$

Prova:

a) Para $-d < a < 0$

Seja $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in F^\infty$

$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, T_a^2 =$

$= (x_1, x_2, x_3, \ldots)\, T_a\, T_a =$

$= (x_1\ \varepsilon - a,\ x_2\ \varepsilon - a,\ x_3\ \varepsilon - a, \ldots)\, T_a =$

$= (x_1\ \varepsilon - a\ \varepsilon - a,\ x_2\ \varepsilon - a\ \varepsilon - a, \ldots) =$

$= (-x_1, -x_2, -x_3, \ldots) =$

$= -1\, .\, (x_1, x_2, x_3, \ldots)$

$= \operatorname{sgn}(a)\, .\, I$

b) Para $a \geqslant 0$

Seja $(\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+1}, \ldots, x_{km+m}, 0, \ldots) \in F^\infty$

$(\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+1}, \ldots, x_{km+m}, 0, \ldots)\, T_a{}^2 =$

$= (\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+1}, \ldots, x_{km+m}, 0, \ldots)\, T_a\, T_a =$

$= (-1)^k\, .\, (\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+m}, \ldots, x_{km+1}, 0, \ldots)\, T_a =$

$= (-1)^k\, .\, (-1)^k\, (\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+1}, \ldots, x_{km+m}, 0, \ldots) =$

$= (-1)^{2k}\, .\, (\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+1}, \ldots, x_{km+m}, 0, \ldots) =$

$= (+1).(0,\dots,0, x_{km+1},\dots, x_{km+m}, 0,\dots) =$

$= \operatorname{sgn}(a) \,.\, I$

3) O adjnunto T_a^* de T_a é $\operatorname{sgn}(a).T_a$.

Prova:

Para $-d < a < 0$

Sejam $x = (x_1, x_2, x_3,\dots)$ e

$y = (y_1, y_2, y_3,\dots)$ elementos de F^∞.

$<(x_1, x_2, x_3,\dots) T_a, (y_1, y_2, y_3,\dots)> =$

$= <(x_1\, \varepsilon - a, x_2\, \varepsilon - a,\dots), (y_1, y_2, y_3,\dots)> =$

$= <(x_1, x_2, x_3,\dots), (y_1, y_2, y_3,\dots)\, \bar{\varepsilon}\, a> =$

$= <(x_1, x_2, x_3,\dots), (-\, y_1\, \varepsilon - a, -\, y_2\, \varepsilon - a,\dots)> =$

$= <(x_1, x_2, x_3,\dots), (-1)(y_1\, \varepsilon - a, y_2\, \varepsilon - a,\dots)> =$

$= <(x_1, x_2, x_3,\dots), (-1)(y_1, y_2, y_3,\dots)\, T_a> =$

$= <x, -1y\, T_a>$

Logo: $T_a^* = -1 \,.\, T_a$

Como $a < 0$,

$T_a^* = \operatorname{sgn}(a) \,.\, T_a$

Para $a \geqslant 0$

Sejam

$(\underbrace{0,\dots,0}_{km}, x_{km+1},\dots, x_{km+m}, 0,\dots)$ e

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, y_{km+1},\ldots, y_{km+m}, 0,\ldots)$$

elementos de F^{∞}.

$$<(\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+1},\ldots, x_{km+m}, 0,\ldots)T_a, (\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, y_{km+1},\ldots)> =$$

$$= <(-1)^k (\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+m},\ldots, x_{km+1}, 0,\ldots), (\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, y_{km+1},\ldots)>$$

$$= (-1)^k <(\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+m},\ldots, x_{km+1}, 0,\ldots), (\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, y_{km+1},\ldots)>$$

$$= (-1)^k < x_{km+m}, y_{km+1} > +\ldots+ (-1)^k < x_{km+1}, y_{km+m} >$$

e

$$<(\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+1},\ldots, x_{km+m}, 0,\ldots), (\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, y_{km+1},\ldots,y_{km+m},0\ldots)T_a>$$

$$= <(\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+1},\ldots), (-1)^k (\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, y_{km+m},\ldots, y_{km+1}, 0\ldots)>$$

$$= (-1)^k <(\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, x_{km+1},\ldots), (\underbrace{0,\ldots,0}_{km}, y_{km+m},\ldots, y_{km+1}, 0,\ldots)>$$

$$= (-1)^k < x_{km+1}, y_{km+m} > + \ldots + (-1)^k < x_{km+m}, y_{km+1} >$$

Portanto:

$T_a^* = T_a$ para $a \geqslant 0$ ou

$T_a^* = \mathrm{sgn}(a) \,.\, T_a$

Estes operadores em geral não são comutativos, mas temos as seguintes regras comutativas especiais.

I) $S_{b'} S_b = S_{b'+b} = S_b S_{b'}$

Prova:

Sejam $b, b' \geqslant 0$ e $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ um elemento de F^{∞}.

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, S_{b'}\, S_b =$$

$$= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b'}, x_1, x_2, x_3, \ldots)\, S_b =$$

$$= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b'}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{b}, x_1, x_2, x_3, \ldots) =$$

$$= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b'+b}, x_1, x_2, x_3, \ldots) =$$

$$= (x_1, x_2, x_3, \ldots)\, S_{b'+b}$$

e

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{b'+b}, x_1, x_2, x_3, \ldots) =$$

$$= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b+b'}, x_1, x_2, x_3, \ldots) =$$

$$= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b'}, x_1, x_2, x_3, \ldots)\, S_b =$$

$$= (x_1, x_2, x_3, \ldots)\, S_b\, S_{b'}$$

II) $T_a\, S_b = \begin{cases} S_b\, T_a & \text{se } v(b) > a \\ -S_b\, T_a & \text{se } v(b) = a \end{cases}$

<u>Prova</u>:

1) Para $0 \leqslant a < v(b) < b$

Seja $m = 2^a$ e $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in F^{\infty}$

$2^{v(b)} \backslash b$, então $2^a \backslash b$, logo b é par. Portanto $b = k \cdot 2^a$, onde k é par.

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots)\ T_a\ S_b =$$

$$= (x_{2^a},\ldots,\ x_1,\ -x_{2^{a+1}},\ldots,\ -x_{2^a+1},\ldots)\ S_b =$$

$$= (\underbrace{0,\ldots,0}_{b},\ x_{2^a},\ldots,\ x_1,\ -x_{2^{a+1}},\ldots,\ -x_{2^a+1},\ldots)$$

e

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots)\ S_b\ T_a =$$

$$= (\underbrace{0,\ldots,0}_{b},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots)\ T_a =$$

$$= (\underbrace{\underbrace{0,\ldots,0}_{2^a},\ \underbrace{-0,\ldots,-0}_{2^a},\ldots,\ \underbrace{-0,\ldots,-0}_{2^a}}_{b\,=\,k\,.\,2^a},\ x_{2^a},\ldots,\ x_1,\ldots)$$

Logo: $T_a\ S_b = S_b\ T_a$ se $v(b) > a$ e $a \geqslant 0$.

2) Para $-d < a < o < v(b) < b$.

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots)\ T_a\ S_b =$$

$$= (x_1,\ \varepsilon - a,\ x_2\ \varepsilon - a,\ x_3\ \varepsilon - a,\ldots)\ S_b =$$

$$= (\underbrace{0,\ldots,0}_{b},\ x_1\ \varepsilon - a,\ x_2\ \varepsilon - a,\ x_3\ \varepsilon - a,\ldots)$$

e

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots)\ S_b\ T_a =$$

$$= (\underbrace{0,\ldots,0}_{b},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots)\ T_a =$$

$$= (\underbrace{0,\ldots,0}_{b},\ x_1\ \varepsilon - a,\ x_2\ \varepsilon - a,\ x_3\ \varepsilon - a,\ldots)$$

Logo:

$$T_a\, S_b = S_b\, T_a \quad \text{se} \quad v(b) > a \quad e \quad a < 0.$$

Portanto, de 1) e 2)

$$T_a\, S_b = S_b\, T_a \quad \text{para} \quad v(b) > a$$

3) Para $v(b) = a$

a) Se b é ímpar, temos que $v(b) = 0$; logo $a = 0$

$$(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots)\ T_o\ S_b =$$

$$= (x_1, -x_2,\ x_3,\ -x_4, \ldots)\ S_b =$$

$$= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b},\ x_1,\ -x_2,\ x_3,\ -x_4, \ldots)$$

e

$$(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots)\ S_b\ T_o =$$

$$= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b},\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots)\ T_o =$$

$$= (\underbrace{0,\ -0, \ldots, 0}_{b}, -x_1,\ x_2,\ -x_3,\ x_4, \ldots)$$

Logo:

$$T_o\ S_b = -\ S_b\ T_o \quad \text{para} \quad a = 0.$$

b) Se b é par, então $2^{v(b)} \diagdown b$, isto é, $2^a \diagdown b$; portanto $b = 2^k.s$, onde s é ímpar.

$$(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots)\ T_{2^k} \cdot S_{2^k.s} =$$

$$= (x_{2^{2k}}, \ldots,\ x_1,\ -x_{2^{2k}+1}, \ldots,\ -x_{2^{2k}+1}, \ldots)\ S_{2^k.s} =$$

$$= (\underbrace{0,\dots,0}_{2^k.s}, - x_{2^{2k}}, \dots, - x_1, x_{2^{2k+1}}, \dots)$$

e

$$(x_1, x_2, x_3, \dots)\ S_{2^k.s}\ T_{2^k} =$$

$$= (\underbrace{0,\dots,0}_{2^k.s}, x_1, x_2, x_3, \dots)\ T_{2^k} =$$

$$= (\underbrace{0,\dots,0}_{2^k.s}, x_{2^{2k}}, \dots, x_1, - x_{2^{2k}+1}, \dots)$$

Logo:

$$T_a\ S_b = - S_b\ T_a \quad \text{se} \quad v(b) = a$$

Portanto:

$$T_a\ S_b = \begin{cases} S_b\ T_a & \text{se } v(b) > a \\ -S_b\ T_a & \text{se } v(b) = a \end{cases}$$

III) $T_a\ T_{a'} = -\text{sgn}(a)\ .\ \text{sgn}(a').T_{a'}\ T_a$

para $a \neq a'$.

1) Para $a < 0$; $a' < 0$ e $a \neq a'$

Seja $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in F^\infty$

$$(x_1, x_2, x_3, \dots)\ T_a\ T_{a'} =$$

$$= (x_1\, \varepsilon - a, x_2\, \varepsilon - a, x_3\, \varepsilon - a, \dots)\ T_{a'} =$$

$$= (x_1\, \varepsilon - a\, \varepsilon - a', x_2\, \varepsilon - a\, \varepsilon - a', \dots)$$

Mas $\varepsilon - a\, \varepsilon - a' = - \varepsilon - a'\, \varepsilon - a$

Logo:

$= - (x_1 \varepsilon - a' \varepsilon - a,\ x_2 \varepsilon - a' \varepsilon - a, \ldots)$

$= - (-1)(-1)(x_1 \varepsilon - a' \varepsilon - a,\ x_2 \varepsilon - a' \varepsilon - a, \ldots)$

$= - \operatorname{sgn}(a) \cdot \operatorname{sgn}(a') \cdot T_{a'}\, T_a.$

2) Para $a > 0$ e $a' < 0$

$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, T_a\, T_{a'} =$

$= (x_{2^a}, \ldots, x_1, - x_{2^a+1}, \ldots, - x_{2^{a}+1}, \ldots)\, T_{a'} =$

$= (x_{2^a} \varepsilon - a', \ldots, x_1 \varepsilon - a', - x_{2^a+1} \varepsilon - a', \ldots)$

e

$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, T_{a'}\, T_a =$

$= (x_1 \varepsilon - a',\ x_2 \varepsilon - a',\ x_3 \varepsilon - a', \ldots)\, T_a =$

$= (x_{2^a} \varepsilon - a', \ldots, x_1 \varepsilon - a', - x_{2^a+1} \varepsilon - a', \ldots) =$

$= - (1) . (-1) (x_{2^a} \varepsilon - a', \ldots, x_1 \varepsilon - a', \ldots) =$

$= - \operatorname{sgn}(a) \cdot \operatorname{sgn}(a') \cdot T_a\, T_{a'}$

3) Para $a > 0$, $a' > 0$ e $a < a'$

$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, T_a\, T_{a'} =$

$= (x_{2^a}, \ldots, x_1, - x_{2^a+1}, \ldots, - x_{2^{a}+1}, \ldots)\, T_{a'} =$

$= (- x_{2^a+k}, \ldots, - x_{2^a+1}, x_1, \ldots, x_{2^a}, \ldots)$

e

$(x_1, x_2, x_3, \ldots) T_{a'} T_a =$

$= (x_{2^a+k}, \ldots, x_{2^{a+1}}, -x_1, \ldots, -x_{2^a}, \ldots)$

$= -(1).(1) \; T_{a'} T_a.$

Logo:

$T_a T_{a'} = -\operatorname{sgn}(a) \operatorname{sgn}(a') T_{a'} T_a$

IV) $T_a P_n = P_n T_a$ se $v(n) \geqslant a$

Na adição de operadores S_b e T_a, seja P_n a projeção de F^∞ em F^n.

a) se $-d < a < 0$; $v(n) \geqslant 0$; $2^{v(n)} \setminus n$

Seja $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in F^\infty$

$(x_1, x_2, x_3, \ldots) T_a P_n =$

$= (x_1 \varepsilon - a, x_2 \varepsilon - a, x_3 \varepsilon - a, \ldots, x_n \varepsilon - a, \ldots) P_n =$

$= (x_1 \varepsilon - a, x_2 \varepsilon - a, \ldots, x_n \varepsilon - a, 0, \ldots)$

e

$(x_1, x_2, x_3, \ldots) P_n T_a =$

$= (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots) T_a =$

$= (x_1 \varepsilon - a, x_2 \varepsilon - a, \ldots, x_n \varepsilon - a, 0, \ldots)$

Logo:

$T_a P_n = P_n T_a$ se $-d < a < 0.$

b) Se $a \geqslant 0$; $v(n) \geqslant a$; $2^{v(n)} \setminus n$ então $2^a \setminus n$; logo

$n = t \cdot 2^a$.

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, T_a\, P_n =$$

$$= (x_{2^a}, \ldots, x_1, x_{2^{a+1}}, \ldots, x_{2^a+1}, \ldots)\, P_n =$$

$$= \underbrace{(x_{2^a}, \ldots, x_1, x_{2^{a+1}}, \ldots, x_{2^a+1}, \ldots, 0, \ldots)}_{t\text{ - vezes}}$$

e

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, P_n\, T_a =$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)\, T_a =$$

$$= (x_{2^a}, \ldots, x_1, x_{2^{a+1}}, \ldots, x_{2^a+1}, \ldots, 0, \ldots)$$

Portanto:

$$T_a\, P_n = P_n\, T_a \quad \text{se} \quad v(n) \geqslant a.$$

<u>Lema</u>:

Seja $a \geqslant 0$ e $m = 2^a$. Então para cada $b \geqslant 0$, o operador $S_b\, T_a\, P_m$ é auto-adjunto.

<u>Prova</u>:

1) Se $b \geqslant m$, então $b \geqslant 2^a$

$$S_b\, T_a\, P_m \underset{=}{(IV)} S_b\, P_m\, T_a$$

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, S_b\, T_a\, P_m =$$

$$= (x_1, x_2, x_3, \ldots)\, S_b\, P_m\, T_a =$$

$$= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b}, x_1, x_2, x_3, \ldots)\, P_m\, T_a =$$

Como $m \leq b$

$$= (0, \ldots, 0, 0, \ldots) T_a = 0$$

e

$$< x . 0, y > = < x, y . 0 >$$

Logo:

$S_b T_a P_m = 0$ é auto-adjunto.

2) Se $b < m$, então $m - b > 0$

Sejam $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ elementos de F^∞.

$$< x S_b T_a P_m, y > =$$

$$= < (x_1, x_2, x_3, \ldots) S_b P_m T_a, (y_1, y_2, y_3, \ldots) > =$$

$$= < (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b}, x_1, x_2, \ldots) P_m T_a, (y_1, y_2, y_3, \ldots) > =$$

$$= < (0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots) T_a, (y_1, y_2, \ldots) > =$$

$$= < (x_{m-b}, \ldots, x_1, 0, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) > =$$

$$= < (x_{m-b}, y_1> + < x_{m-b-1}, y_2 > + \ldots + < x_1, y_{m-b} >$$

e

$$< x, y S_b T_a P_m > =$$

$$= < (x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots) S_b T_a P_m > =$$

$$= < (x_1, x_2, x_3, \ldots), (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b}, y_1, y_2, y_3, \ldots) P_m T_a > =$$

$$= < (x_1, x_2, \ldots), (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b}, y_1, \ldots, y_m, 0, \ldots) T_a > =$$

$$= <(x_1, x_2, \ldots), (y_{m-t}, y_{m-b-1}, \ldots, y_1, 0, \ldots)> =$$

$$= <x_1, y_{m-b}> + <x_2, y_{m-b-1}> + \ldots + <x_{m-b}, y_1>$$

Logo:

$$<x\, S_b\, T_a\, P_m, y> = <x, y\, S_b\, T_a\, P_m>$$

Portanto:

$S_b\, T_a\, P_m$ é auto-adjunto.

<u>Exemplos</u>:

1) Para $b = 0$ e $a = 0$

   $m = 2^a$, logo $m = 1$.

$$<x\, S_o\, T_o\, P_1, y> =$$

$$= <(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, S_o\, T_o\, P_1, (y_1, y_2, y_3, \ldots)> =$$

$$= <(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, T_o\, P_1, (y_1, y_2, y_3, \ldots)> =$$

$$= <(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \ldots)\, P_1, (y_1, y_2, y_3, \ldots)> =$$

$$= <(x_1, 0, 0, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)> =$$

$$= <x_1, y_1>$$

e

$$<x, y\, S_o\, T_o\, P_1> =$$

$$= <(x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)\, S_o\, T_o\, P_1> =$$

$$= <(x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)\, T_o\, P_1> =$$

$$= <(x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, -y_2, y_3, -y_4, \ldots)\, P_1> =$$

$= \langle (x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, 0, 0, \ldots) \rangle =$

$= \langle x_1, y_1 \rangle$

Logo $S_o\ T_o\ P_1$ é auto-adjunto.

2) Para $b = 1$; $a = 1$ e $m = 2^1 = 2$

$\langle x\ S_1\ T_1\ P_2, y \rangle =$

$= \langle (x_1, x_2, x_3, \ldots)\ S_1\ T_1\ P_2, (y_1, y_2, y_3, \ldots) \rangle =$

$= \langle (0, x_1, x_2, \ldots)\ T_1\ P_2, (y_1, y_2, y_3, \ldots) \rangle =$

$= \langle (x_1, 0, -x_3, -x_2, \ldots)\ P_2, (y_1, y_2, y_3, \ldots) \rangle =$

$= \langle (x_1, 0, 0, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots) \rangle =$

$= \langle x_1, y_1 \rangle$

e

$\langle x, y\ S_1\ T_1\ P_2 \rangle =$

$= \langle (x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)\ S_1\ T_1\ P_2 \rangle =$

$= \langle (x_1, x_2, x_3, \ldots), (0, y_1, y_2, y_3, \ldots)\ T_1\ P_2 \rangle =$

$= \langle (x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, 0, -y_3, -y_2, \ldots)\ P_2 \rangle =$

$= \langle (x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, 0, 0, \ldots) \rangle =$

$= \langle x_1, y_1 \rangle$

Logo $S_1\ T_1\ P_2$ é auto-adjunto.

3) Para $b = 0$; $a = 2$ e $m = 2^a = 4$

$\langle x\ S_o\ T_2\ P_4, y \rangle =$

$= < (x_1, x_2, x_3, \ldots)\ S_o\ T_2\ P_4,\ (y_1, y_2, y_3, \ldots) > =$

$= < (x_1, x_2, x_3, \ldots)\ T_2\ P_4,\ (y_1, y_2, y_3, \ldots) > =$

$= < (x_4, x_3, x_2, x_1, -x_8, -x_7, \ldots) P_4, (y_1, y_2, y_3, \ldots) > =$

$= < (x_4, x_3, x_2, x_1, 0, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots) > =$

$= < x_4, y_1 > + < x_3, y_2 > + < x_2, y_3 > + < x_1, y_4 >$

e

$< x, y\ S_o\ T_2\ P_4 > =$

$= < (x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)\ S_o\ T_2\ P_4 > =$

$= < (x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)\ T_2\ P_4 > =$

$= < (x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_4, y_3, y_2, y_1, -y_8, \ldots)\ P_4 > =$

$= <(x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_4, y_3, y_2, y_1, 0, \ldots) > =$

$= < x_1, y_4 > + < x_2, y_3 > + < x_3, y_2 > + < x_4, y_1 >$

Logo $S_o\ T_2\ P_4$ é auto-adjunto.

<u>Teorema 5.1</u>:

O conjunto ε dos operadores em F^∞ definido por

$$\varepsilon = \{ T_a\ S_b \ / \ -d < a < v(b) \} \quad ,$$

tem propriedade "P".

<u>Prova</u>:

Para cada $r \geqslant 0$ e $x \neq 0$; $x \in F^\infty$, seja:

$$\varepsilon^r = \{ T_a\ S_b \ / \ -d < a < \min (v(b), r + 1) \}$$

e

$$\varepsilon^r(x) = \{ xA \,/\, A \in \varepsilon^r \}$$

Escrevendo $n = 2^r$ e $V_k^r = F\ (kn,\ (k+1)n]$, temos:

$$F^\infty = V_o^r \oplus V_1^r \oplus V_2^r \oplus \ldots$$

Partindo-se $\varepsilon^r(x)$ na união disjunta de E_o^r, $E_1^r, \ldots,$ temos:

$$\varepsilon^r(x) = E_o^r \cup E_1^r \cup E_2^r \cup \ldots,$$ na qual

$$E_k^r = \varepsilon^r(x) \cap [(F^{km})^\perp - (F^{(k+1)n})^\perp]$$

Temos:

1) Se $j > k$, cada vetor em E_j^r projeta no zero em V_k^r.

De fato:

$$(F^{jr}) = \{(\underbrace{0,\ldots,0}_{jr},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots)\}$$

$$(F^{(j+1)r})^\perp = \{(\underbrace{0,\ldots,0}_{(j+1)r},\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots)\}$$

$$(F^{jr})^\perp = (F^{(j+1)r})^\perp =$$

$$= \{(\underbrace{0,\ldots,0}_{jr},\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_r,\ldots)/x_i \neq 0 \quad \text{p/algum } i\}$$

$$V_k^r = \{(0,\ldots,0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_r)\}$$

Seja $j > k$, então $jr \geqslant kr$

logo $jr \geqslant (k+1)r$.

Então:

$$E_j^r \xrightarrow{P_j} V_k^r \quad \text{é zero.}$$

2) Vetores em E_k^r jamais projetam no zero em V_k^r.

De fato:

$$E_k^r = \{(\underbrace{0,\ldots,0}_{kr}, x_1, x_2, \ldots)\}$$

$$V_k^r = \{(\underbrace{0,\ldots,0}_{kr}, x_1', x_2', \ldots, x_k')\} \neq \{\vec{0}\}$$

pois existe $x_i \neq 0$ em E_k^r tal que $P_k(x_i) = x_j \neq 0$ em V_k^r, logo

$$E_k^r \xrightarrow{P_k} V_k^r \quad \text{não é zero.}$$

3) $\mathcal{E}$ tem propriedade "P" se e somente se cada conjunto de vetores $\varepsilon^r(x)$ é linearmente independente.

De fato:

Vamos supor que ε tem propriedade "P". Vamos mostrar que $\mathcal{E}^r(x)$ é linearmente independente.

$\mathcal{E}$ tem propriedade "P", então $\Sigma\ \alpha_i\ A_i$ é um monomorfismo. Suponhamos que $\varepsilon^r(x)$ é linearmente dependente, então

$$\Sigma\ \alpha_i(x\ A_i) = 0 \qquad \text{para algum } \alpha_i \neq 0$$

$$0 = \Sigma\ \alpha_i(x\ A_i) = x\ \Sigma\ \alpha_i\ A_i,$$

onde $x \neq 0$.

Mas $\Sigma\ \alpha_i\ A_i \neq 0$, pois, por hipótese, é um monomorfismo.

Portanto $x = 0$. Contradição

Logo: $\varepsilon^r(x)$ é linearmente independente.

Reciprocamente, suponhamos que $\varepsilon^r(x)$ é linearmente independente. Mostraremos que ε tem propriedade "P".

Por absurdo:

Suponhamos que $\Sigma\ \alpha_i\ A_i$ não é um monomorfismo, então existe $x \neq 0$ tal que

$x \; (\Sigma \; \alpha_i \; A_i) = 0$ ou

$\Sigma \; x \; (\alpha_i \; A_i) = 0$

$\Sigma \; \alpha_i \; (x \; A_i) = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0$

logo $\Sigma \; \alpha_i \; A_i = 0$ contradição.

Logo ε tem propriedade "P".

4) A projeção $\overline{E}_k^r$ de E_k^r em V_k^r é um conjunto linearmente independente.

Vamos mostrar por indução de r.

a) para $r = 0$

Seja $x = y \; S_p$ onde $y = (y_1, y_2, \ldots)$ com $y_1 \neq 0$.

1) se $k < p$; $\overline{E}_k^o$ é vazio, pois

$\overline{E}_k^o : E_k^o \to V_k^o$

$x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, y_1, y_2, \ldots) \to \{ \; \}$

pois se $k < p$, temos que $k + 1 \lneq p$.

2) Se $k \geqslant p$.

Então:

$\overline{E}_k^o = \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, y_1 \varepsilon - a, 0, \ldots) \; / \; -d < a < 0\}$

para $k - p$ ímpar.

De fato:

$x \; A = x \; T_a \; S_b = y \; S_p \; T_a \; S_b =$

$= (y_1, 0, 0, \ldots) \; S_p \; T_a \; S_b =$

$$= (\underbrace{0,\dots,0}_{p}, y_1, 0,\dots)\, T_a\, S_b =$$

$$= (\underbrace{0,\dots,0}_{p}, y_1 \varepsilon - a, 0,\dots)\, S_b =$$

$$= (\underbrace{0,\dots,0}_{p+b}, y_1 \varepsilon - a, 0,\dots)$$

$$\overline{E}_k^o : E_k^o \to V_k^o$$

$$(\underbrace{0,\dots,0}_{p+b}, y_1 \varepsilon - a, 0,\dots) \to (\underbrace{0,\dots,0}_{k}, y_1 \varepsilon - a, 0,\dots)$$

3) Se $k - p$ é par e $h \geqslant p$, então:

$$y\, T_a\, S_b = (y_1, 0, 0,\dots)\, S_p\, T_a\, S_b =$$

$$= (\underbrace{0,\dots,0}_{p}, y_1, 0,\dots)\, T_a\, S_b =$$

$$= (-1)^p (\underbrace{0,\dots,0}_{p}, y_1, 0,\dots)\, S_b =$$

$$= (\underbrace{0,\dots,0}_{p+b}, (-1)^p y_1, 0,\dots)$$

$$\overline{E}_k^o : E_k^o \to V_k^o$$

$$(\underbrace{0,\dots,0}_{p+b}, (-1)^p y_1, 0,\dots) \to (\underbrace{0,\dots,0}_{k}, (-1)^p y_1, 0,\dots)$$

Em cada caso, $\overline{E}_k^o$ é linearmente independente.

b) Suponhamos que $\overline{E}_k^{r-1}$ é linearmente independente. Vamos mostrar que $\overline{E}_k^r$ também é linearmente independente.

Seja $E_k'^{\,r}$ um conjunto de vetores em E_k^r não pertencentes a $\varepsilon^{r-1}(x)$.

Como:

$$V_k^r = V_{2k}^{r-1} \oplus V_{2k+1}^{r-1} \qquad e$$

$$E_k^r = E_{2k}^{r-1} \cup E_{2k+1}^{r-1} \cup E_k'^{r}$$

Para demonstrar que $\bar{E}_k^r$ é linearmente independente, precisamos do seguinte lema:

Lema 5.3:

Suponhamos z e w vetores distintos em E_k^r, tal que um deles (suponhamos z) pertence a $E_k'^{r}$. Então suas projeções em V_k^r são mutuamente ortogonais.

Prova:

Sejam:

$$z = x\, T_r\, S_c \qquad e \qquad w = x\, T_a\, S_b$$

com $a \leqslant r$ e $x = y\, S_p$.

Pela definição de E_k^r, temos que z e w estão em $(F^{km})^{\perp}$ mas não pertencem a $(F^{(k+1)m})^{\perp}$. Como estes são subespaços invariantes de T_r e T_a, o mesmo deve ser verdadeiro para os vetores $z\, T_r$ e $w\, T_a$.

ou:

$$z\, T_r = x\, T_r\, S_c\, T_r = x\, S_c\, T_r\, T_r =$$

$$= y\, S_p\, S_c\, T_r\, T_r = y\, S_{p+c}\, \mathrm{sgn}(r).I = y\, S_{p+c}$$

pois $T_r^2 = \mathrm{sgn}(r).I$ e $r \geqslant 0$,

logo $\mathrm{sgn}(r) = 1$

e

$$w\,T_a = x\,T_a\,S_b\,T_a = x\,S_b\,T_a\,T_a =$$

$$= y\,S_p\,S_b\,T_a\,T_a = y\,S_{p+b}\,.\,\mathrm{sgn}(a)\,.\,I =$$

$$= \mathrm{sgn}(a)\,.\,y\,.\,S_{p+b}.$$

Disto segue que $z, w \in E_k^r$ se e somente se são satisfeitas as seguintes condições entre a, b e c.

$$c \geqslant 0 \;;\; v(c) > r \;;\; km < p + c + 1 \leqslant (k+1)m$$

$$b \geqslant 0 \;;\; v(b) > a \;;\; km < p + b + 1 < (k+1)m$$

Em particular, se $z \neq w$, então $a < r$.

De fato:

Se $z\,T_r = w\,T_a$ e $z = w$, temos que $T_r = T_a$; logo $r = a$.

Portanto, se $z \neq w$, $a < r$.

<u>Definição 5.4</u>:

Seja $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ um elemento de F^∞. Para b negativo, definimos o operador S_b por:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\,S_b = (x_{1-b}, x_{2-b}, x_{3-b}, \ldots)$$

Este operador também satisfaz as seguintes propriedades:

$$1)\; T_a\,S_b = \begin{cases} S_b\,T_a & \text{se } v(b) > a \\ -S_b\,T_a & \text{se } v(b) = a \end{cases}$$

<u>Prova</u>:

a) Se $a < 0$ e $b < 0$

Como $b < 0$, então $v(b) = v(-b) \geqslant 0$, logo $v(b) > a$.

Então:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, T_a\, S_b =$

$= (x_1\,\varepsilon - a,\ x_2\,\varepsilon - a,\ x_3\,\varepsilon - a, \ldots)\, S_b =$

$= (x_{1-b}\,\varepsilon - a,\ x_{2-b}\,\varepsilon - a,\ x_{3-b}\,\varepsilon - a, \ldots)$

e

$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, S_b\, T_a =$

$= (x_{1-b}, x_{2-b}, x_{3-b}, \ldots)\, T_a =$

$= (x_{1-b}\,\varepsilon - a,\ x_{2-b}\,\varepsilon - a,\ x_{3-b}\,\varepsilon - a, \ldots)$

Logo, $T_a\, S_b = S_b\, T_a$ para $a < 0$.

b) Se $a \geqslant 0$ e $b < 0$

Como $b < 0$, então $v(b) > 0$.

Seja $a \geqslant 0$ tal que $v(b) > a$, logo $2^a \backslash b$.

Seja $m = 2^a$; como $2^a \backslash b$, temos que $b = \bar{k} \,.\, m$, onde k é negativo.

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{km}, x_{km+1}, \ldots, x_{km+m}, 0, \ldots)\, T_a\, S_b =$$

$$= (-1)^k\, (\underbrace{0, \ldots, 0}_{km}, x_{km+m}, \ldots, x_{km+1}, 0, \ldots)\, S_b$$

Como $b = \bar{k} \,.\, m$ e $k \geqslant 0$, então $k \geqslant \bar{k}$.

Logo:

$$= (-1)^k\, (\underbrace{0, \ldots, 0}_{(k-\bar{k})m}, x_{km+m-b}, \ldots, x_{km+1-b}, 0, \ldots)$$

e

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{km},\ x_{km+1},\ldots,\ x_{km+m},\ 0,\ldots)\ S_b\ T_a =$$

$$= (\underbrace{0,\ldots,0}_{(k-\bar{k})m},\ x_{km+1-b},\ldots,\ x_{km+m-b},\ 0,\ldots)\ T_a =$$

$$= (-1)^{k-\bar{k}}\ (\underbrace{0,\ldots,0}_{(k-\bar{k})m},\ x_{km+m-b},\ldots,\ x_{km+1-b},\ 0,\ldots)$$

Como $2^a \backslash b$, então b é par e $b = \bar{k} \cdot 2^a$, logo $\bar{k}$ é par.

Portanto:

$$(-1)^{k-\bar{k}} = (-1)^k$$

Concluímos então que:

$T_a\ S_b = S_b\ T_a$ se $v(b) > a$

c) Para $v(b) = a$

Como $b = \bar{k} \cdot m$ e $k \geqslant \bar{k}$, então

$2^a \backslash 2^{v(b)}$ e $2^{v(b)} \backslash b$, logo $2^a \backslash b$ e $\bar{k}$ é ímpar.

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{km},\ x_{km+1},\ldots,\ x_{km+m},\ 0,\ldots)\ T_a\ S_b =$$

$$= (-1)^k\ (\underbrace{0,\ldots,0}_{km},\ x_{km+m},\ldots,\ x_{km+1},\ 0,\ldots)\ S_b =$$

$$= (-1)^k\ (\underbrace{0,\ldots,0}_{(k-\bar{k})m},\ x_{km+m-b},\ldots,\ x_{km+1-b},\ 0,\ldots)$$

e

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{km},\ x_{km+1},\ldots,\ x_{km+m},\ 0,\ldots)\ S_b\ T_a =$$

$$= (\underbrace{0,\ldots,0}_{(k-\bar{k})m},\ x_{km+1-b},\ldots,\ x_{km+m-b},\ 0,\ldots)\ T_a =$$

$$= (-1)^{k-\bar{k}} (\underbrace{0,\ldots,0}_{(k-\bar{k})m}, x_{km+m-b}, \ldots, x_{km+1-b}, 0, \ldots)$$

Como $\bar{k}$ é ímpar, então:

$$(-1)^{k-\bar{k}} = -(-1)^k$$

logo:

$$T_a S_b = - S_b T_a \quad \text{se} \quad v(b) = a.$$

2) A fórmula $S_{b'} S_b = S_{b'+b}$ permanece válida enquanto $b' \geqslant 0$.

<u>Prova</u>:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) S_{b'} S_b =$$

$$= (\underbrace{0,\ldots,0}_{b'}, x_1, x_2, x_3, \ldots) S_b$$

Fazendo:

$$y_n = 0 \quad \text{para} \quad n = 1,2,\ldots,b'$$

$$y_{b'+k} = x_k$$

temos:

$$(y_1, y_2, \ldots, y_{b'}, y_{b'+1}, y_{b'+2}, \ldots) S_b =$$

$$= (\underbrace{0,\ldots,0}_{b'-|b|}, y_{b'+1-|b|}, y_{b'+2-|b|}, \ldots)$$

e

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) S_{b'+b} = ?$$

a) se $|b| \leqslant b'$, então $b' - |b| \geqslant 0$

$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\ S_{b'+b}$ =

$= (x_1, x_2, x_3, \ldots)\ S_{b'-|b|}$ =

$= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b' - |b|}, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ =

$= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b' - |b|}, y_{b'-|b|+1}, y_{b'-|b|+2}, \ldots)$

b) Se $|b| > b'$, então $b' - |b| < 0$

$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\ S_{b'+b}$ =

$(x_1, x_2, x_3, \ldots)\ S_{b'-|b|}$ =

$= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b' - |b|}, x_{1-b'+|b|}, x_{2-b'+|b|}, \ldots)$

$= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{b' - |b|}, y_{b'+1-|b|}, y_{b'+2-|b|}, \ldots)$

logo, $S_{b'}, S_b = S_{b'+b}$

3) Os operadores S_b e S_{-b} são adjuntos um do outro.

Prova:

Suponhamos $b < 0$.

Vamos mostrar que:

$$< x\ S_b, y > \ = \ < x, y\ S_{-b} >$$

Sejam $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ elementos de F^{∞}.

$$< (x_1, x_2, x_3,\ldots) S_b , (y_1, y_2, y_3,\ldots) > =$$

$$= < (x_{1-b}, x_{2-b}, x_{3-b},\ldots), (y_1, y_2, y_3,\ldots) > =$$

$$= < x_{1-b}, y_1 > + < x_{2-b}, y_2 > + \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} < x_{i-b}, y_i >$$

e

$$< x, y S_{-b} > =$$

$$= < (x_1, x_2, x_3,\ldots), (y_1, y_2, y_3,\ldots) S_{-b} > =$$

$$= < (x_1, x_2, x_3,\ldots), (\underbrace{0,\ldots,0}_{-b}, y_1, y_2, y_3,\ldots) > =$$

$$= < x_1, 0 > + \ldots + < x_{-b}, 0 > + < x_{-b+1}, y_1 > +$$

$$+ < x_{-b+2}, y_2 > + \ldots =$$

$$= < x_{1-b}, y_1 > + < x_{2-b}, y_2 > + \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} < x_{i-b}, y_i >$$

Logo, o adjunto de S_b é S_{-b} e vice-versa.

Definição 5.5:

A projeção de F^{∞} em V_k^r é dado por $S_{-kn} P_n S_{kn}$.

Vamos projetar z em V_k^r.

Seja $z = x T_r S_c$, onde $x = y S_p$.

então $z = y S_p T_r S_c$

logo:

$$\overline{z} = z S_{-kn} P_n S_{kn}$$

$$\bar{z} = (y\, S_p\, T_r\, S_c)\, S_{-kn}\, P_n\, S_{kn}$$

$$\bar{z} = y\, S_p\, S_c\, T_r\, S_{-kn}\, P_n\, S_{kn}$$

$$\bar{z} = y\, S_{p+c}\, S_{-kn}\, T_r\, P_n\, S_{kn}$$

$$\bar{z} = (-1)^k\, y\, S_{p+c-kn}\, T_r\, P_n\, S_{kn}$$

e

$$w = x\, T_a\, S_b \quad \text{onde} \quad x = y\, S_p$$

logo:

$$w = y\, S_p\, T_a\, S_b$$

$$\bar{w} = w\, S_{-kn}\, P_n\, S_{kn}$$

$$\bar{w} = y\, S_p\, T_a\, S_b\, S_{-kn}\, P_n\, S_{kn}$$

$$\bar{w} = y\, S_p\, S_b\, T_a\, S_{-kn}\, P_n\, S_{kn}$$

$$\bar{w} = y\, S_{p+b}\, T_a\, S_{-kn}\, P_n\, S_{kn}$$

$$\bar{w} = y\, S_{p+b}\, S_{-kn}\, T_a\, P_n\, S_{kn}$$

$$\bar{w} = y\, S_{p+b-kn}\, T_a\, P_n\, S_{kn}$$

Como S_{kn} preserva o produto interno e P_n é auto-adjunto idempotente, temos:

$$< \bar{z}, \bar{w} > =$$

$$= < (-1)^k\, y\, S_{p+c-kn}\, T_r\, P_n\, S_{kn},\; y\, S_{p+b-kn}\, T_a\, P_n\, S_{kn} >$$

$$= (-1)^k < y\, S_{p+c-kn}\, T_r\, P_n\, S_{kn},\; y\, S_{p+b-kn}\, T_a\, P_n\, S_{kn} >$$

Como S_{kn} preserva o produto interno, então:

$$< y\, S_{kn},\; z\, S_{kn} > \;=\; < y\;,\; z >$$

logo:

$$< \bar{z} = \bar{w} > =$$

$$= (-1)^k < y\, S_{p+c-kn}\, T_r\, P_n,\; y\, S_{p+b-kn}\, T_a\, P_n > =$$

$$= (-1)^k \; < y\, A \;,\; y\, B > \quad \text{onde}$$

$A = S_{p+c-kn}\, T_r\, P_n$ e

$B = S_{p+b-kn}\, T_a$, pois P_n é auto-adjunto idempotente.

O operador A é auto-adjunto pelo lema 5.1.

$$B\, A^* = B\, A =$$

$$= S_{p+b-kn}\, T_a \cdot S_{p+c-kn}\, T_r\, P_n =$$

$$= S_{p+b-kn} \cdot S_{p+c-kn}\, T_a\, T_r\, P_n =$$

$$= S_{p+b-kn}\, S_{p-kn}\, T_a\, T_r\, P_n =$$

$$= S_{p+c-kn}\, S_{p+b-kn}\, T_a\, T_r\, P_n =$$

$$= S_{p+c-kn}\, T_a \cdot S_{p+b-kn}\, P_n\, T_r =$$

$$= S_{p+c-kn}\, T_a\, P_n\, S_{p+b-kn}\, T_r =$$

$$= S_{p+c-kn}\, T_a\, P_n\, T_r \quad S_{-(p+c-kn)}$$

Mas $T_a\, T_r = -\, \mathrm{sgn}\, a \,.\, \mathrm{sgn}\, r \,.\, T_r\, T_a$, como $r \geqslant 0$, então:

$$T_a\, T_r = -\, \mathrm{sgn}\ a\ T_r\, T_a$$

Logo:

$$= S_{p+c-kn}\, P_n\, T_a\, T_r\, S_{-(p+b-kn)} =$$

$$= S_{p+c-kn}\, P_n\, (-\, \text{sgn}\, a\ T_r\, T_a)\, S_{-(p+b-kn)} =$$

$$= -\, \text{sgn}\, a\ S_{p+c-kn}\, P_n\, T_r\, T_a\, S_{-(p+b-kn)} =$$

$$= -\, \text{sgn}\, a\ S_{p+c-kn}\, T_r\, P_n\, T_a\, S_{-(p+b-kn)} =$$

$$= -\, \text{sgn}\, a\ .\ A\, B^*$$

$$= -\, A\, B^*$$

Assim:

$$<\bar{z},\ \bar{w}> = (-1)^k <y\, A,\ y\, B> =$$

$$= (-1)^k <y,\ y\, B\, A^*> =$$

$$= (-1)^k <y,\ y\, (-A\, B^*)> =$$

$$= (-1)^{k+1} <y,\ y\, A\, B^*> =$$

$$= (-1)^{k+1} <y\, B\ ,\ y\, A>$$

Então:

$$(-1)^k <y\, A\ ,\ y\, B> = (-1)^{k+1} <y\, B\ ,\ y\, A>$$

$$<y\, A\ ,\ y\, B> = -<y\, B\ ,\ y\, A>$$

$$<y\, A\ ,\ y\, B> = 0$$

logo: $<\bar{z}\ ,\ \bar{w}> = 0$

Como $<\bar{z}\ ,\ \bar{w}> = 0$, então $\bar{z} \perp \bar{w}$ e $\bar{z},\ \bar{w} \in V_k^r$

Temos então:

$$E_k^r : E_k^r \to V_k^r$$

$z \to \bar{z}$

$w \to \bar{w}$

Como $\bar{z} \perp \bar{w}$, então estes são linearmente independentes, logo $\bar{E}_k^r$ é linearmente independente.

Lema 5.4:

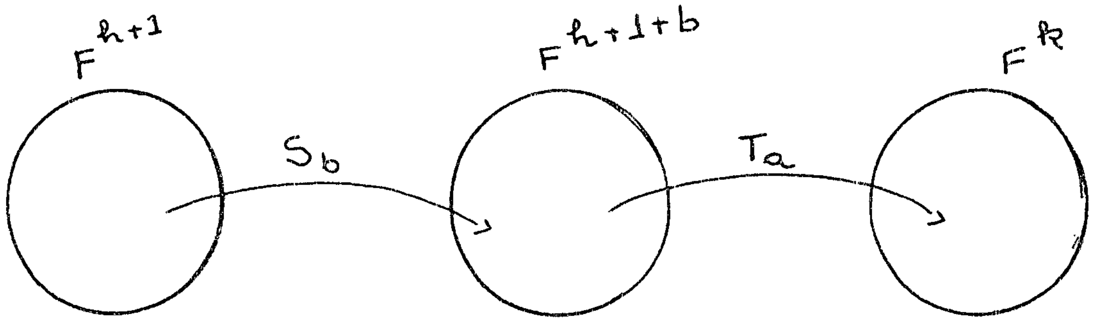
Suponhamos $h < k$ e seja $\mathcal{E}(h+1, k)$ o conjunto dos operadores em $\mathcal{E}$, que leva F^{h+1} em F^k. Então:

$$\text{card } \varepsilon(h+1, k) = d(k-h) + \tau(k, h)$$

onde $\tau(k, h)$ é o definido anteriormente.

Prova:

$$\varepsilon(h+1, k) = \{T_a S_b \in \varepsilon \ / \ T_a S_b : F^{h+1} \to F^k\}$$



Como $T_a S_b \in \varepsilon$, então $-d < a < 0$ e $h + 1 + b \leqslant k$.

Existem $(d-1)(k-h)$ operadores deste tipo em $\varepsilon(h+1, k)$. O restante dos operadores tem a forma $T_a S_b$, onde $0 \leqslant a < v(b)$ e a, b satisfazendo a restrição adicional que T_a tem que levar a função de $F(b, h+1+b]$ em F^k.

Esta restrição só interessa para $g \leqslant k$, onde

$$g = 2^a \; ([h/2^a] + 1) + b$$

é um pequeno múltiplo de 2^a, não excedendo a $h + 1 + b$.

Se $b = 2^{a+1} \cdot (s - 1)$, a restrição pode ser escrita por:

$$s \leqslant \frac{k - h}{2^{a+1}} + \frac{1}{2} \{\frac{h}{2^a}\} + \frac{1}{2}$$

De fato:

$$g \leqslant k$$

$$2^a \; ([h/2^a] + 1) + b \leqslant k$$

Mas $b = 2^{a+1} \; (s - 1)$

logo:

$$2^a \; ([h/2^a] + 1) + 2^{a+1} \; (s - 1) \leqslant k$$

$$2^a \; [h/2^a] + 2^a + 2^{a+1} \; (s - 1) \leqslant k$$

$$2^{a+1} \; (s - 1) \leqslant k - 2^a \; [h/2^a] - 2^a$$

$$s - 1 \leqslant \frac{k - 2^a \; [h/2^a] - 2^a}{2^{a+1}}$$

$$s - 1 \leqslant \frac{k}{2^{a+1}} - \frac{1}{2} \; [h/2^a] - \frac{1}{2}$$

$$s \leqslant \frac{k}{2^{a+1}} - \frac{1}{2} \; [h/2^a] - \frac{1}{2} + 1$$

$$s \leqslant \frac{k}{2^{a+1}} - \frac{1}{2} \; [h/2^a] + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{h}{2^a} - \frac{1}{2} \frac{h}{2^a}$$

$$s \leqslant \frac{k}{2^{a+1}} - \frac{1}{2} \frac{h}{2^a} + \frac{1}{2} \frac{h}{2^a} - \frac{1}{2} \; [h/2^a] + \frac{1}{2}$$

$$s \leqslant \frac{k - h}{2^{a+1}} + \frac{1}{2} \; (\frac{h}{2^a} - [h/2^a]) + \frac{1}{2}$$

$$s \leqslant \frac{k - h}{2^{a+1}} + \frac{1}{2} \left\{\frac{h}{2^a}\right\} + \frac{1}{2} \qquad \text{(I)}$$

Isto segue que o número total dos operadores restantes é:

$$\text{Card} \{ T_a \; S_b \; / \; a, \; b \geqslant 0 \; ; \; b = 2^{a+1}(s - 1)$$

para algum inteiro s satisfazendo I}

$$= \sum_{a \geqslant 0} \sigma_a \; (k, \; h)$$

onde $\sigma_a(k, h)$ denota a parte inteira do lado direito de (I).

Se $k = \sum_{j \geqslant 0} \alpha_j \; 2^j$

$h = \sum_{j \geqslant 0} \beta_j \; 2^j$ e

$k - h = \sum_{j \geqslant 0} \gamma_j \; 2^j$ são expansões diádicas, então por inspeção direta, temos:

$$\sigma_a \; (k, \; h) = \gamma_a + \sum_{j > a} \gamma_j \; . \; 2^{j-a-1} \qquad \text{(II)}$$

exceto quando encontramos a situação que

$$\gamma_a = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{0 \leqslant j < a} (\beta_j + \gamma_j) \; 2^j \geqslant 2^a \qquad \text{(III)}$$

no qual, caso σ_a (k, h) é 1 mais o valor tomado em (II).

Mas a inequação em (III) conserva-se se e somente se existe um al̲cance para a a-ésima posição digital, quando k - h é somado a h em aritmética diádica. Então (III) é equivalente a condição que $\gamma_a = 0$ e $\alpha_a \neq \beta_a$, a qual, por definição, aparece $\tau(k, h)$ com período a̲, variando de 0 à ∞.

Conseqüentemente:

Card $\varepsilon(h + 1 , k) =$

$$= (d - 1)(k - h) + \sum_{a \geq 0} (\gamma_a + \sum_{j > a} \gamma_j \cdot 2^{j-a-1} + \tau(k, h)$$

Mas:

$$\sum_{a \geq 0} (\gamma_a + \sum_{j > a} \gamma_j \cdot 2^{j-a-1}) =$$

$$= \sum_{j \geq 0} \gamma_j \, 2^j = k - h$$

Logo:

Card $\varepsilon(h + 1 , k) = (d - 1)(k - h) + (k - h) + \tau(k, h)$

Card $\varepsilon(h + 1, k) = d(k - h) - (k - h) + (k - h) + \tau(k, h)$

Card $\varepsilon(h + 1, k) = d(k - h) + \tau(k, h)$

Teorema 5.2:

Para todo $k > h \geq 0$, existe uma função bilinear não-singular

$$R^{d(h+1)} \times R^{d(k-h) + \tau(k, h)} \to R^{dk}$$

para $d = 1,2,4$ ou 8.

Prova:

Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots$ operadores distintos em ε. Pelo teorema 5.1, a função $\phi: F^\infty \times R^\infty \to F^\infty$ definida por $\phi(x, e_i) = x A_i$ é não-singular, isto é $\phi(x, e_i) = 0$ se e somente se $x = 0$ ou $e_i = 0$.

Como $\{e_i\}_{i \geq 1}$ é a base usual de R^∞, então $e_i \neq 0$, logo se $\phi(x, e_i) = 0$, temos que $x = 0$.

Pelo lema 5.3, existe um subespaço V em R^∞ de dimensão $d(k - h) + \tau(k, h)$ tal que:

$$\phi/V : F^{h+1} \times V \to F^k$$

$$(x, e_{i_j}) \to x A_{ij}$$

onde $V = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{d(k-h)} + \tau(k, h)}\}$ é uma função bilinear não-singular.

Como a dimensão real de R é $\underline{d}$, temos:

$$\psi: R^{d(h+1)} \times R^{d(k-h) + \tau(k, h)} \to F^{d\,k}$$

é bilinear.

<u>Exemplo</u>:

Sejam $k = 5$; $h = 2$ e $d = 8$.

Então, pelo teorema 5.2, como $k > h$, existe uma função bilinear não-singular

$$\phi: R^{8(2+1)} \times R^{8(5-2) + \tau(5,2)} \to R^{8.5}$$

isto é:

$$\phi: R^{24} \times R^{25} \to R^{40}$$

Esta função é melhor que a função $h: R^{24} \times R^{24} \to R^{40}$ obtida, representando-se R^{24} e R^{40} como os espaços das 3-uplas e 5-uplas respectivamente, dos números de Cayley e usando a fórmula:

$$h((x_o, x_1, x_2), (y_o, y_1, y_2)) =$$

$$= (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$$

com $z_k = \sum_{i+j=k} x_i\, y_i$

Para definirmos dimensão geométrica, precisamos divagar e desenvolver alguns pré-requisitos e notações necessárias a nossa definição.

Para maiores detalhes ver [6].

Seja [x, y] o conjunto das classes de homotopia das funções do espaço X no espaço Y.

Seja $B\,O_{(k)}$, o espaço do grupo ortogonal $O_{(k)}$,

$B\,O_{(o)}$ é o espaço formado de um único ponto e

$B\,O_{(\infty)} = B\,O$, o espaço do grupo ortogonal infinito.

Suponhamos que X é uma união finita de C.W. Complexos e

$$K\,O_{(k)}\,(X) = [X\, ,\, B\,O_{(k)}]\ ;$$

$$\tilde{K}\,O_{(X)} = [X\, ,\, B\,O]$$

$K\,O_{(k)}\,(X)$ identificamos com o conjunto dos isomorfismos das classes dos fibrados reais k - dimensional sobre X.

Seja dim X = n

Temos:

$$K\,O_{(n+1)}(X) \cong K\,O_{(n+2)}(X) \cong \dots \cong \tilde{K}\,O_{(X)}$$

e os isomorfismos são induzidos pela inclusão natural nos espaços classificatórios.

Definimos o anel do fibrado real sobre X por:

$$K\,O_{(X)} = \tilde{K}\,O_{(X)} + Z$$

As operações de multiplicação e adição em $K\,O_{(X)}$ são induzidas pelo produto tensorial e a soma de Whitney do fibrado.

Seja $\varepsilon(X)$ o conjunto de todos os isomorfismos das classes do fibrado real em X, isto é:

$$\varepsilon(X) = \bigcup_{k=0}^{\infty} K\,O_{(k)}(X)$$

Usando a inclusão $B\,O_{(k)} \subset B\,O$, temos um homomorfismo

$$\Theta : \varepsilon(X) \to K\,O_{(X)}$$

Iremos usar o símbolo ξ^k para denotar um fibrado k-dimensional e $\xi_o + k$ para denotar $\Theta(\xi^k)$.

O elemento ξ_o de $\tilde{K}\,O_{(X)}$ é chamado a classe estável de ξ^k.

Um elemento de $K\,O_{(X)}$ é dito positivo se este é um elemento da imagem de Θ.

<u>Definição 5.6</u>:

Se $\xi_o \in \tilde{K}\,O_{(X)}$, a dimensão geométrica de ξ_o é o menor inteiro k tal que $\xi_o + k$ é positivo.

Denotamos por:

$$gd\,(\xi_o) = k.$$

Seja $k\xi_n$ a k-ésima soma de Whitney do fibrado ξ_n sobre P^n e $gd\,(k\,\xi_n)$ a sua dimensão geométrica.

K . Y. Lan mostrou em [4] a existência de uma função bilinear não-singular

$$R^{n+1} \times R^r \to R^k \qquad \text{onde}$$

$$gd\,(k\,\xi_n) \leqslant k - r$$

Aplicando o teorema 5.2, concluímos:

Proposição 5.1:

Se $n = dh + d - 1$, então $gd\ (d\ k\ \xi_n) \leq dh - \tau(k, h)$, onde $d = 1,2,4$ ou 8.

Segundo Gitler [2, Teorema 2.1], temos:

$\eta = [2^{r+1} + 8\ (k + \ell)]\xi$ um fibrado sobre $P^{2^r + 8k + 2}$.

Se $k + \ell < 2^{r-3}$ e $C_{k+1\ ,\ k}$ é ímpar, então:

$$gd\ (\eta) \geq 2^r + 8k - 1$$

Em alguns casos especiais, o resultado de $gd\ (k\ \xi_n)$ obtido na proposição 5.1, pode ser combinado com alguns resultados de Gitler, para dar o valor exato da dimensão geométrica.

Segundo Adams, [1, Teorema 7.4], temos:

$$m \not\equiv -1 \text{ mód } 4\ ,$$

então $\tilde{K}_R\ (P^n\ /\ P^m) = Z_2 f$, onde $f = \psi_{(n,\ m)}$

Se $m = 0$, então $K_R\ (P^n)$ pode ser descrito pelo gerador λ e as duas relações:

$$\lambda^2 = -2\lambda \qquad \text{e} \qquad \lambda^{f+1} = 0$$

(de modo que $2^f\lambda = 0$)

Assim, a projeção

$$P^n \to P^n\ /\ P^m$$

são funções isomorfas de $\tilde{K}_R\ (P^n\ /\ P^m)$ no subgrupo de $\tilde{K}_R\ (P^n)$ gerado por λ^{g+1}, onde $g = \psi_{(m,\ 0)}$.

Escrevemos $\lambda^{(g+1)}$ para o elemento em $\tilde{K}_R\ (P^n\ /\ P^m)$.

No caso de $m \equiv -1$ mód 4, temos:

$$\tilde{K}_R\ (P^n / P^{4t-1}) = Z + \tilde{K}_R\ (P^n / P^{4t})$$

A segunda parte desta soma é mergulhada pela projeção $P^n / P^{4t-1} \to P^n / P^{4t}$, e a primeira é gerada por um elemento $\bar{\lambda}^{(g)}$, como definido anteriormente.

As operações são dadas pelas seguintes fórmulas:

(i) $$\Psi_R^k\ \lambda^{(g+1)} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ é par} \\ \lambda^{(g+1)} & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(ii) $$\Psi_R^k\ \bar{\lambda}^{(g)} = k^{2t}\ \bar{\lambda}^{(g)} + \begin{cases} 1/2\ k^{2t}\ \lambda^{(g+1)} & \text{se } k \text{ é par} \\ 1/2\ (k^{2t}-1)\lambda^{(g+1)} & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Segundo Sanderson [6, Teorema 2.1] temos:
para $k > 0$, $M^n \subset R^{n+k}$ se e somente se gd $(-\tau_o) \leq k$.

Seja 2^N uma potência suficientemente grande de 2.

Por Adams, $2^N \xi_n$ é um fibrado trivial, assim

$v(P^n) = (2^N - n - 1)\xi_n$ é um fibrado normal para P^n.

Por Sanderson, temos que P^n mergulha em $R^{n+\ell}$, onde $\ell > 0$, se e somente se

$$\ell > \text{gd}\ (v\ (P^n))$$

<u>Teorema 5.3</u>:

Seja $d = 1,2,4$, ou 8.

Se $n \neq 1, 3, 7$ e $n + 1 \equiv 0$ (mód d), então P^n mergulha em $R^{2n - \alpha(n) - \beta(d)}$, onde $\beta(d) = (d-1) - \alpha(d-1)$

Prova:

Seja $n + 1 = d\ (h + 1)$ e $k = (2^N/d) - h - 1$

Substituindo k na proposição 5.1, obtemos:

$$gd\ (d\ [(2^N/d) - h - 1]\ \xi_n) =$$

$$= gd\ ((d\ .\ 2^N/d - d\,h - d)\ \xi_n) =$$

Mas $n + 1 = d(h + 1)$, então:

$$= gd\ ((2^N - d\,h - d)\ \xi_n) =$$

$$= gd\ (2^N - d(h + 1)\ \xi_n) =$$

$$= gd\ ((2^N - (n + 1))\ \xi_n) =$$

$$= gd\ ((2^N - n - 1)\ \xi_n) =$$

$$= gd\ (v\ (P^n)) \leq d\,h - \tau(+k,\ h)$$

pela proposição 5.1.

Mas $\tau(k,\ h) = \alpha(h)$ pois

$$k + h + 1 = 2^N/d - h - 1 + h + 1 = 2^N/d$$

é uma potência de 2.

e

$$\alpha(n) = \alpha(d\,h + d - 1) =$$

$$= \alpha(d\,h) + \alpha(d - 1) = \alpha(h) + \alpha(d - 1)$$

Logo: $\alpha(h) = \alpha(n) - \alpha(d - 1)$

Então:

$$gd\ (v\ (P^n)) = d\,h - (\alpha(n) - \alpha(d - 1))$$

onde $dh = n - d + 1$

$$gd(v(P^n)) = n - \alpha(n) - [(d - 1) - \alpha(d - 1)]$$

Por Sanderson, P^n mergulha em $R^{n+\ell}$, onde $\ell \geqslant gd(v(P^n))$

logo:

$$P^n \text{ mergulha em } R^{n+(n - \alpha(n) - [(d-1) - \alpha(d-1)]}$$

ou

$$P^n \text{ mergulha em } R^{2n - \alpha(n) - [(d-1) - \alpha(d-1)]}$$

Seja $\beta(d) = (d - 1) - \alpha(d - 1)$

Portanto

$$P^n \text{ mergulha em } R^{2n - \alpha(n) - \beta(d)}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] ADAMS, J.F. Vector Fields on Spheres, Ann of Math, 75 (1962) 603-32.

[2] GITLER, S. Projective Sitefel Manifolds - II. Applications, Topology 7, Pergamon Press, 1968. Great Britain, 47-53.

[3] LAM, K.Y. Construction of some Nonsingular Bilinear maps. Princeton University, 1967, 88-93.

[4] LAM, K.Y. Construction of Nonsingular Bilinear Maps, Topology 6, (1967), 473-82.

[5] MILNOR, J. Characteristic Classes, Princeton University Press, Princeton N.J., 1973, 3-50.

[6] SANDERSON. Imersions and Embeddings of Projective Spaces, Proc. Lond. Math Soc.(3), 14 (1964), 135-53.